Práctica 7
Sistemas deductivos, completitud y compacidad para lógica de primer orden

Lógica y Computabilidad

Verano 2007

Ejercicio 1. Demostrar que los siguientes axiomas de SQ son válidos

SQ4 $(\forall x)\varphi \to \varphi[x/t]$ si x es reemplazable por t en φ

SQ7 si φ es un axioma entonces $(\forall x)\varphi$ también es un axioma

Ejercicio 2. Sea $\Gamma = \{\neg\forall x_1 P(x_1), P(x_2), P(x_3), \ldots\}$. ¿Es Γ consistente? ¿Es Γ satisfacible?

Ejercicio 3. Sea $\Delta = \{SQ1, \ldots, SQ7\}$ el conjunto de todos los axiomas de SQ.

a. Supongamos que agregamos a Δ una fórmula φ que no es válida. Mostrar que el sistema resultante no es correcto.

b. Yendo al otro extremo, supongamos que eliminamos todos los axiomas, esto es, $\Delta = \emptyset$. Mostrar que el sistema resultante no es completo.

c. Supongamos que modificamos Δ agregando una nueva fórmula válida φ. Explicar por qué el sistema resultante es correcto y completo.

Ejercicio 4. Se dice que un modelo de primer orden es transitivo cuando todas sus relaciones binarias son transitivas. Partiendo de la axiomatización para SQ, proponer una extensión SQ^T que caracterice la clase de modelos transitivos.

a. Demostrar que SQ^T es correcta con respecto a la clase de modelos transitivos.

b. Demostrar que SQ^T es completa con respecto a la clase de todos los modelos.

c. Demostrar que SQ^T no es correcta con respecto a la clase de todos los modelos.

Ejercicio 5. Considerar un lenguaje de primer orden igualdad, un símbolo de función binario $+$ y dos constantes 0 y 1. Sea P la siguiente axiomatización:

$$\begin{array}{l}\forall x.\neg(0 = x + 1)\\ \forall x.x + 1 = y + 1 \to x = y\\ \forall x.\forall y.(x + y) + 1 = x + (y + 1)\end{array}$$

Demostrar que P no es completa con respecto al modelo de los naturales con la suma.

Ejercicio 6.

a. Dar un conjunto de fórmulas Γ tal que si Γ es satisfacible en una interpretación $\mathcal{I}$, entonces el dominio de I sea infinito. Sugerencia: escribir una fórmula que, dado un n fijo, fuerce a que el modelo tenga *al menos* n elementos.

b. Usando compacidad y el ítem anterior, demostrar que no existe ninguna fórmula φ tal que si φ es satisfacible en una interpretación $\mathcal{I}$, entonces el dominio de I sea finito.

Ejercicio 7. Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje con un símbolo de predicado R binario e $\mathcal{I}$ una interpretación adecuada para R. Demostrar usando compacidad que no existe una fórmula φ_R tal que su interpretación represente la clausura transitiva de la relación binaria $R^{\mathcal{I}}$.

Ejercicio 8. Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje con un símbolo de predicado R, e $\mathcal{I}$ cualquier interpretación cuyo dominio represente a los nodos de un grafo no orientado, y el símbolo R pueda ser interpretado como la relación "es adyacente a" (esto es, cualquier interpretación donde la relación $R^{\mathcal{I}}$ sea irreflexiva y simétrica). Demostrar que no es posible expresar la propiedad que afirma que un grafo es conexo, es decir, que entre cualquier par de nodos hay un camino de longitud finita.

Ejercicio 9. Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje con un símbolo de predicado unario P, uno binario Q, y un símbolo de función unario f. Probar usando árboles que las siguientes fórmulas son universalmente válidas:

a. $\exists y P(y) \to \forall x \exists y P(y)$

b. $\exists y P(y) \to \exists y \exists x P(y)$

c. $\forall x P(x) \to P(t)$ donde t es un término sin variables.

Ejercicio 10. Usando árboles de refutación, decidir si $\alpha \in \mathbf{Con}(\Gamma)$ en los siguientes casos:

a. $\Gamma = \{\forall x \exists y P(x,y)\}, \alpha = \exists y \forall x P(x,y)$

b. $\Gamma = \{\exists y \forall x P(x,y)\}, \alpha = \forall x \exists y P(x,y)$

Ejercicio 11. Introducir apropiadamente nuevas reglas para el conectivo $\leftrightarrow$ y demostrar que

$$\forall x \forall y P(x,y) \leftrightarrow \forall y \forall x P(x,y)$$

es una fórmula universalmente válida.

Ejercicio 12. Usando árboles de refutación, decidir si las siguientes fórmulas son universalmente válidas:

a. $\forall x \exists y \forall z \exists w (P(x,y) \vee \neg P(z,w))$

b. $(\forall x(P(x) \to R(x)) \wedge (\exists x(P(x) \wedge \neg Q(x)))) \to \exists x(R(x) \wedge \neg Q(x))$

Ejercicio 13. Demostrar usando árboles:

$$\{\forall x \forall y \forall z\ (P(x,y,z) \to P(y,x,z)), \exists x \forall y \exists z P(y,z,x)\} \models \exists x \forall y \exists z P(z,y,x)$$