Práctica 6 - Lógica de primer orden

Lógica y Computabilidad

Verano 2007

Ejercicio 1. Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje de primer orden con un símbolo de predicado binario P, dos símbolos de función f_1, f_2, donde f_1 es unario y f_2 es binario, y un símbolo de constante c. Decidir cuáles de las siguientes expresiones del lenguaje $\mathcal{L}$ son términos y cuáles son fórmulas, donde x, y denotan variables.

a. $\exists f_2(x)P(f_2(x))$.

b. $f_2(f_1(x), f_1(y))$.

c. $\forall x \exists c P(x, c)$.

d. $\forall c \exists x P(x, c)$

e. $\exists x \exists y \exists x P(f_2(x, y), f_1(y))$.

f. $\forall \exists P(\exists, \exists)$

Ejercicio 2. Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje con un símbolo de predicado binario P. En cada una de las siguientes fórmulas, encontrar las apariciones libres y ligadas de las variables de dichas fórmulas.

a. $\forall x \exists y P(x, x)$.

b. $(\exists x P(y, y) \to \exists y P(y, z))$.

c. $\exists x(\exists y P(x, x) \wedge P(x, y))$.

d. $\forall z(\forall x P(z, x)) \vee P(x, z)$.

Ejercicio 3. Decidir si las siguientes interpretaciones son apropiadas para los siguientes lenguajes, en donde f es un símbolo unario y g es binario:

a. $\mathcal{C} = \emptyset$, $\mathcal{F} = \{f, g\}$, $\mathcal{P} = \{=\}$, $U_I = \mathbb{N}, f_I(n) = \sqrt{n}, g_I(n, m) = n + m$.

b. $\mathcal{C} = \{c\}$, $\mathcal{F} = \{f, g\}$, $\mathcal{P} = \{=\}$, $U_I = \mathbb{N}, f_I(n) = n^2, g_I(n, m) = n + m$, $c_I = 2$.

c. $\mathcal{C} = \{c, d\}$, $\mathcal{F} = \{f, g\}$, $\mathcal{P} = \{=\}$, $U_I = \mathbb{N}$,

$$f_I(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ es primo} \\ 2 & \text{si } n \text{ no es primo} \end{cases}$$

$g_I(n, n) = n^2 - n$, $c_I = d_I = 0$.

Ejercicio 4. En cada uno de los siguientes ejemplos, describir la propiedad que determinan los siguientes enunciados.

a. $\forall x \forall y (P(x, y) \to \exists z((Q(z) \wedge P(x, z)) \wedge P(z, y)))$, donde P y Q son símbolos de predicados binario y unario respectivamente, el universo de la interpretación son los números reales, $P_I =<$, $Q_I(x)$ significa x es un número racional.

b. $\forall x(Q(x) \to \exists y(R(y) \wedge P(y,x)))$, donde P es un símbolo de predicado binario, Q y R son símbolos de predicados unarios, el universo de la interpretación es el conjunto de los días y las personas, $P_I(x,y)$ significa x nace en el día y, $Q_I(x)$ significa x es un día, y $R_I(x)$ significa x es un esclavo.

c. $\forall x \forall y(Q(x) \wedge Q(y)) \to P(f(x,y)))$, donde Q y P son símbolos de predicados unarios, f es un símbolo de función binario, el universo de la interpretación son los números enteros, $Q_I(x)$ significa x es par, $P_I(x)$ significa x es impar, y $f_I(x,y) = x + y$.

d. Para los siguientes enunciados, el universo de la interpretación es un conjunto de personas, $P_I(x,y)$ significa x quiere a y, donde P es un símbolo de predicado binario.

   1) $\exists x \forall y P(x,y)$
   2) $\forall y \exists x P(x,y)$
   3) $\exists x \exists y(\forall z P(y,z) \to P(x,y))$.
   4) $\exists x \forall y \neg P(x,y)$.

Ejercicio 5. Traducir las siguientes sentencias en enunciados:

a. Ningún político es honesto.

b. No todas las aves pueden volar.

c. x es trascendente si y sólo si x es irracional.

d. Ivanoff odia a todas las personas que no se odian a sí mismas.

e. Todos aman a alguien y ninguno ama a todos, o bien alguien ama a todos.

Ejercicio 6. Usando como lenguaje el que contiene únicamente la igualdad, escribir enunciados que expresen:

a. Existen al menos dos elementos.

b. Existen exactamente dos elementos.

c. Existen a lo sumo dos elementos.

Agregando al lenguaje un símbolo de predicado unario P, escribir:

d. Existen a lo sumo dos elementos y al menos uno que cumplen la propiedad P.

e. Si existe un elemento que cumple la propiedad P, es único.

f. Existe un elemento que cumple la propiedad P y es único.

Ejercicio 7. Considerar un lenguaje con un símbolo de función f binario. Escribir una fórmula φ que cumpla $\mathcal{A} \models \varphi$ sii $f_{\mathcal{A}}$ es inyectiva pero no sobreyectiva. ¿Es φ satisfacible? ¿Qué sucede con los modelos finitos?

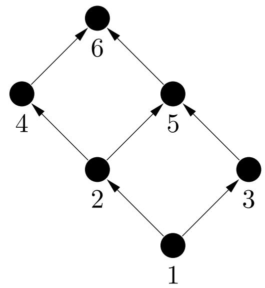
Ejercicio 8. Dar un ejemplo de un lenguaje y una interpretación de dicho lenguaje con universo infinito tal que todo elemento del universo de la interpretación dada sea distinguible.

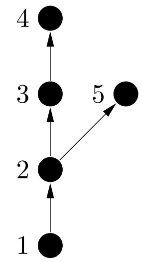
Ejercicio 9. Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje con igualdad y un símbolo de función binario, y sean $\mathcal{I}_1$ e $\mathcal{I}_2$ las siguientes interpretaciones:

$$\mathcal{I}_1 = (\mathbb{N}, +), \mathcal{I}_2 = (\mathbb{N}, \cdot),$$

donde $\mathbb{N}$ denota el conjunto de los números naturales. Probar que 1 es un elemento distinguido en ambas interpretaciones.

Ejercicio 10. Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje de primer orden y con un símbolo de predicado binario $\leq$. Probar que todos los elementos del universo de la siguientes interpretaciones son distinguibles,

a) 

b) 

Ejercicio 11. Probar que si el universo de una interpretación es finito con $n+1$ elementos, y tiene la propiedad que n elementos del universo son distinguibles, entonces todos los elementos son distinguibles.