Práctica 5
Sistemas deductivos para lógica proposicional y aplicaciones de compacidad

Lógica y Computabilidad

Verano 2007

Ejercicio 1. Considerar la siguiente axiomatización SP para la lógica proposicional, en donde φ, ψ y θ son fórmulas proposicionales arbitrarias.

$$\begin{array}{rl}
\text{SP1}: & \vdash \varphi \to (\psi \to \varphi) \\
\text{SP2}: & \vdash (\varphi \to (\psi \to \theta)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \theta)) \\
\text{SP3}: & \vdash (\neg\varphi \to \neg\psi) \to ((\neg\varphi \to \psi) \to \varphi) \\
\text{MP}: & \vdash \varphi \text{ y } \vdash \varphi \to \psi \text{ entonces } \vdash \psi
\end{array}$$

Demostrar que $SP3$ es una tautología, y que si las premisas de la regla MP son tautologías, el resultado es una tautología.

Ejercicio 2. Demostrar usando SP:

a) $\vdash (\neg\varphi \to \varphi) \to \varphi$
b) $\{\varphi \to \psi, \psi \to \theta\} \vdash \varphi \to \theta$
c) $\vdash (\neg\varphi \to \neg\psi) \to (\psi \to \varphi)$

(para los dos últimos items, recordar que en SP vale el teorema de la deducción)

Ejercicio 3. Sea φ una fórmula que no es una tautología, y sea Γ la teoría de SP. Sea Γ^+ la teoría que resulta de agregar como nuevos axiomas a todas las instanciaciones de φ. Demostrar que Γ^+ es inconsistente.

Ejercicio 4. Recordemos el procedimiento de Lindenbaum para obtener un conjunto maximal consistente a partir de un conjunto consistente Γ.

1) Enumeramos las fórmulas de nuestro lenguaje $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$.

2) Definimos la secuencia de conjuntos:

$$\begin{array}{lcl}
\Gamma_0 & = & \Gamma \\
\Gamma_{n+1} & = & \begin{cases} \Gamma_n \cup \{\varphi_n\} & \text{si el conjunto es consistente} \\ \Gamma_n \cup \{\neg\varphi_n\} & \text{en otro caso} \end{cases} \\
\Gamma^+ & = & \bigcup_{n \geq 0} \Gamma_n
\end{array}$$

Demostrar:

a. Cada Γ_i es consistente
b. Exactamente una de las fórmulas φ y $\neg\varphi$ está en Γ^+ para cada fórmula φ
c. Si $\Gamma^+ \vdash \varphi$, entonces $\varphi \in \Gamma^+$
d. Γ^+ es un conjunto maximal consistente

Ejercicio 5. Utilizando el método de los árboles, decidir si las fórmulas listadas a continuación son tautologías, contradicciones o contingencias (en este último caso, hallar una valuación que las satisfaga y otra que no).

a. $(\neg(p_1 \vee p_2) \rightarrow ((p_3 \wedge p_1) \vee (p_2 \rightarrow p_3)))$.

b. $\neg((p_1 \rightarrow p_3) \rightarrow ((p_2 \rightarrow p_3) \rightarrow ((p_1 \vee p_2) \rightarrow p_3)))$.

c. $((\neg\neg\neg(p_1 \wedge p_2) \vee p_3) \rightarrow p_4)$.

Ejercicio 6. Utilizando árboles, decidir si $\alpha \in \mathbf{Con}(\Gamma)$ en los siguientes casos:

a. $\alpha = (p_1 \wedge (p_1 \rightarrow p_0))$, $\Gamma = \{p_1, p_0, \neg p_0\}$.

b. $\alpha = (p_1 \rightarrow p_0), \Gamma = \{p_1, p_1 \rightarrow \neg p_0\}$.

c. $\alpha = ((p_1 \wedge p_2) \rightarrow p_0), \Gamma = \{p_1, (p_2 \vee p_0), (p_1 \wedge p_0)\}$.

Ejercicio 7. Sea $\alpha \in \mathbf{Form}$ tal que α es consecuencia lógica del conjunto formado por todas las subfórmulas de α diferentes de α.

a. Dar ejemplos de fórmulas que tienen esta propiedad y probarlo utilizando el método de los árboles.

b. ¿Puede dar una caracterización de las fórmulas que cumplen esta propiedad?

Ejercicio 8. Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

a. Si todo árbol de refutación de una fórmula es abierto, entonces la fórmula es una tautología.

b. Si α es contradicción, entonces todo árbol de refutación de α es cerrado.

c. Si una fórmula admite un árbol de refutación completo y cerrado, entonces todo árbol de refutación completo de dicha fórmula es cerrado.

Ejercicio 9. Demostrar que las siguientes definiciones de compacidad son equivalentes:

a. Si $\Gamma \models \varphi$ entonces para algún subconjunto finito $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$, $\Gamma_0 \models \varphi$.

b. Si todo subconjunto finito $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ es satisfacible, Γ es satisfacible.

c. Si Γ es insatisfacible, algún subconjunto finito de Γ es insatisfacible.

Ejercicio 10. Sean Γ_1 y Γ_2 conjuntos satisfacibles de fórmulas tales que $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ es insatisfacible. Mostrar que existen fórmulas $\alpha \in \mathbf{Con}(\Gamma_1)$, $\beta \in \mathbf{Con}(\Gamma_2)$ tales que $\alpha \rightarrow \neg\beta$ es una tautología.

Ejercicio 11. Sea Γ un conjunto de contingencias tal que para todo par de fórmulas α, β se cumple que $\mathbf{Var}(\alpha) \cap \mathbf{Var}(\beta) = \emptyset$. Probar que Γ es satisfacible.

Ejercicio 12. Sea Γ un conjunto de fórmulas tal que cada valuación satisface al menos una fórmula de Γ. Probar que existe un número finito de fórmulas $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \Gamma$ tales que $\alpha_1 \vee \ldots \vee \alpha_n$ es tautología.

Ejercicio 13. Sea Γ un conjunto de fórmulas que verifica la siguiente propiedad: si $\alpha, \beta \in \Gamma$, entonces $\alpha \rightarrow \beta$ es tautología ó $\beta \rightarrow \alpha$ es tautología. Probar que si $\Gamma \models \gamma$, entonces existe $\delta \in \Gamma$ tal que $\{\delta\} \models \gamma$.