Práctica 4 - Lógica proposicional

Lógica y Computabilidad

Verano 2007

Ejercicio 1. Sea $v : \mathbf{Form} \to \{0, 1\}$ una valuación, donde **Form** denota el conjunto de fórmulas del cálculo proposicional. Si sólo se conocen $v(p_1), v(p_2)$ y $v(p_3)$, siendo $v(p_1) = v(p_2) = v(p_3) = 0$, decidir si es posible calcular $v(\alpha)$ en los siguientes casos:

a. $\alpha = \neg p_1$.

b. $\alpha = ((p_5 \vee p_3) \to p_1)$.

c. $\alpha = ((p_1 \vee p_2) \to p_3)$.

d. $\alpha = \neg p_4$.

e. $\alpha = ((p_8 \to p_5) \to (p_8 \wedge p_0))$.

Ejercicio 2. Dadas las siguientes fórmulas del cálculo proposicional:

- $\alpha_1 = (\neg p_1 \to (p_3 \vee p_4))$.
- $\alpha_2 = \neg(p_2 \to (p_3 \wedge p_1))$.
- $\alpha_3 = ((\neg p_2 \to p_3) \to (p_2 \vee (p_5 \to p_3)))$.

Hallar todas las valuaciones v tales que:

a. $v(\alpha_i) = 1$.

b. $v(\alpha_i) = 1$ y $v(p_j) = 0$ si $p_j \notin \mathbf{Var}(\alpha)$.

donde **Var** denota al conjunto de variables proposicionales y $\mathbf{Var}(\alpha)$ al subconjunto de **Var** cuyos elementos son las variables proposicionales que aparecen en α.

Ejercicio 3. Sean $\alpha, \beta \in \mathbf{Form}$. Demostrar que:

a. $(\alpha \wedge \beta)$ es tautología si y sólo si α y β son tautologías.

b. $(\alpha \vee \beta)$ es contradicción si y sólo si α y β son contradicciones.

c. $(\alpha \to \beta)$ es contradicción si y sólo si α es tautología y β es contradicción.

d. Si $\mathbf{Var}(\alpha) \cap \mathbf{Var}(\beta) = \emptyset$, entonces $(\alpha \to \beta)$ es tautología si y sólo si α es contradicción o β es tautología.

Ejercicio 4. Sean $\alpha, \beta \in \mathbf{Form}$.

a. Probar que si $\alpha \wedge \beta$ es una contingencia, entonces α es contingencia o β es contingencia.

b. Probar que si α y β son contingencias y no tienen variables proposicionales en común, entonces $\alpha \wedge \beta$ es contingencia.

Ejercicio 5. Supongamos que $\alpha \in \mathbf{Form}$ es tal que, para toda $p_i \in \mathbf{Var}(\alpha)$, $\alpha \vee p_i$ es tautología y $\alpha \wedge p_i$ es contradicción. ¿Puede existir tal α? Sugerencia: probar que α tiene una sola variable proposicional.

Ejercicio 6. Sea $\Gamma = \{\alpha_i\}_{i=1}^k$ una sucesión de fórmulas del cálculo proposicional, y sea $\approx_\Gamma$ la siguiente relación binaria definida sobre **Val** (el conjunto de todas las valuaciones): $v_1 \approx_\Gamma v_2$ si y sólo si $v_1(\alpha_i) = v_2(\alpha_i)$ para todo $i \in \{1, \ldots, k\}$.

a. Probar que $\approx_\Gamma$ es una relación de equivalencia.

b. Probar que el número de elementos del conjunto cociente $\mathbf{Val}/\approx_\Gamma$ es menor o igual que 2^k.

c. Para cada número natural n tal que $1 \leq n \leq 2^k$, encontrar k fórmulas $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ tales que $\mathbf{Val}/\approx_\Gamma$ tenga exactamente n elementos.

Ejercicio 7. Se dice que un conjunto de conectivos es *adecuado* si, a partir de sus elementos, pueden definirse todos los demás conectivos. Luego, toda tabla de verdad puede ser representada por una fórmula que está construida sólo con los conectivos de un conjunto adecuado.

a. Probar que $\{\neg, \wedge, \vee\}$, $\{\neg, \wedge\}$, $\{\neg, \vee\}$ y $\{\neg, \rightarrow\}$ son adecuados.

b. Demostrar que $\{\neg\}$, $\{\vee, \wedge\}$ y $\{\vee, \rightarrow\}$ no son adecuados.

Ejercicio 8. Dadas $\alpha, \beta \in \mathbf{Form}$ puede escribirse $(\neg\alpha \vee \neg\beta)$ como $\alpha|\beta$ (llamada barra de *Sheffer*), y $(\neg\alpha \wedge \neg\beta)$ como $\alpha \downarrow \beta$ (barra de *Nicod*).

a. Construir las tablas de verdad de $\alpha|\beta$ y $\alpha \downarrow \beta$.

b. Mostrar que $\{|\}$ y $\{\downarrow\}$ son adecuados.

c. Probar que si $\{*\}$ es un conectivo binario adecuado, entonces $*$ es $|$ ó $\downarrow$.

Ejercicio 9. Analizar si los siguientes conectivos ternarios son adecuados:

a. $*_1(\alpha, \beta, \gamma) = (\alpha \rightarrow (\neg\beta \wedge \gamma))$.

b. $*_2(\alpha, \beta, \gamma) = (\alpha \rightarrow (\beta \wedge \gamma))$.

Ejercicio 10. Consideremos $\mathcal{L}' = \mathcal{L} \cup \{\perp\}$, el lenguaje del cálculo proposicional al que se le agrega un símbolo constante (o conectivo de aridad cero), caracterizado por $v(\perp) = 0$ para toda valuación.

a. Probar que $\{\perp, \rightarrow\}$ es adecuado.

b. Si en lugar de agregar $\perp$, le agregamos a $\mathcal{L}$ un símbolo constante $\top$, caracterizado por $v(\top) = 1$, para toda valuación v, ¿qué podría decirse de $\{\top, \rightarrow\}$?

Ejercicio 11. Sea $\Gamma \subseteq \mathbf{Form}$.

a. Probar que si Γ es satisfacible y $\Gamma' \subseteq \Gamma$, entonces Γ' es satisfacible. Mostrar que la recíproca no es cierta.

b. Probar que Γ es satisfacible si y sólo si $\mathbf{Con}(\Gamma)$ es satisfacible.

Ejercicio 12. Sean $\Gamma, \Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ conjuntos de fórmulas. Probar que:

a. $\Gamma \subseteq \mathbf{Con}(\Gamma)$.

b. si $\Gamma_1 \subseteq \Gamma_2$, entonces $\mathbf{Con}(\Gamma_1) \subseteq \mathbf{Con}(\Gamma_2)$.

c. si $\Gamma_1 \subseteq \mathbf{Con}(\Gamma_2)$ y $\Gamma_2 \subseteq \mathbf{Con}(\Gamma_3)$ entonces $\Gamma_1 \subseteq \mathbf{Con}(\Gamma_3)$.

d. $\mathbf{Con}(\mathbf{Con}(\Gamma)) = \mathbf{Con}(\Gamma)$.

Ejercicio 13. Sean $\alpha, \beta \in \mathbf{Form}$.

a. Probar que $\mathbf{Con}(\{\beta\}) \subseteq \mathbf{Con}(\{\alpha\})$ si y sólo si $\alpha \rightarrow \beta$ es tautología.

b. Analizar la validez de las siguientes afirmaciones:

   1) $\mathbf{Con}(\{(\alpha \wedge \beta)\}) = \mathbf{Con}(\{\alpha\}) \cap \mathbf{Con}(\{\beta\})$.
   2) $\mathbf{Con}(\{(\alpha \vee \beta)\}) = \mathbf{Con}(\{\alpha\}) \cup \mathbf{Con}(\{\beta\})$.
   3) $\mathbf{Con}(\{(\alpha \rightarrow \beta)\}) \subseteq \mathbf{Con}(\{\beta\})$.

Ejercicio 14. Demostrar que son equivalentes:

a. $\neg(\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_n) \in \mathbf{Con}(\emptyset)$.

b. $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ no son simultáneamente válidas para ninguna valuación.

c. Existe una fórmula β tal que $\beta \in \mathbf{Con}(\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\})$ y $\neg\beta \in \mathbf{Con}(\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\})$.

d. $\beta \in \mathbf{Con}(\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\})$ para toda fórmula β.

Ejercicio 15. Sea Γ un conjunto de fórmulas. Decimos que Γ es *maximalmente satisfacible* si Γ es satisfacible, y para cualquier fórmula $\varphi \notin \Gamma$, $\Gamma \cup \{\varphi\}$ es insatisfacible. Demostrar que

a. Si Γ es maximalmente satisfacible, entonces para toda fórmula φ, sucede que $\varphi \in \Gamma$ o bien $\neg\varphi \in \Gamma$.

b. Si Γ es satisfacible y para toda fórmula φ, $\varphi \in \Gamma$ ó $\neg\varphi \in \Gamma$, entonces Γ es maximalmente satisfacible.

Ejercicio 16. Sea Γ un conjunto maximalmente satisfacible de fórmulas. Demostrar que $\Gamma \models \varphi$ sii $\varphi \in \Gamma$. ¿Se puede concluir a partir de esto que $\Gamma = \mathbf{Con}(\Gamma)$?

Ejercicio 17. Sea Γ un conjunto maximalmente satisfacible de fórmulas. Probar que si $\alpha \vee \beta \in \Gamma$, entonces $\alpha \in \Gamma$ ó $\beta \in \Gamma$ para todo par de fórmulas α, β.