Práctica 3 - Teoría de la computabilidad

Lógica y Computabilidad

Verano 2007

Ejercicio 1. Sea $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ computable.

a. Demostrar que la función

$$g(x) = \begin{cases} \min\{y : f(y) = x\} & \text{si existe } y \text{ tal que } f(y) = x \\ \uparrow & \text{en otro caso} \end{cases}$$

es parcialmente computable.

b. Demostrar que si f es además biyectiva, f^{-1} es computable

Ejercicio 2. Sea $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una función computable y suryectiva. Probar que existe una función computable e inyectiva $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que $g(f(x)) \leq x$ para todo $x \in \mathbb{N}$.

Ejercicio 3. Sea $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una función computable biyectiva. Probar que $\text{Halt}(f(x), x)$ no es computable. Sugerencia: considerar la función:

$$h(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } \Phi(x, f^{-1}(x)) \uparrow \\ \uparrow & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Ejercicio 4. Sean f, g y h las funciones dadas por:

$$\begin{aligned} f(x) &= \begin{cases} \Phi(x,x)+1 & \text{si } \Phi(x,x)\downarrow \\ \uparrow & \text{en otro caso} \end{cases} \\ g(x) &= \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \text{dom } f \\ \uparrow & \text{si } x \notin \text{dom } f \end{cases} \\ h(x) &= \begin{cases} 0 & \text{si } \Phi(x,x)\downarrow \\ \uparrow & \text{en otro caso} \end{cases} \end{aligned}$$

Probar que f, g y h son parcialmente computables

Ejercicio 5. Probar que la siguiente función es primitiva recursiva:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = \langle\langle a, b\rangle, c\rangle \text{ y } \Phi_a(b) \text{ termina en menos de } c \text{ pasos} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Ejercicio 6. Decimos que una función parcialmente computable f es *extensible* si existe g computable tal que $g(x) = f(x)$ para todo $x \in \text{dom } f$. Probar que existe una función parcialmente computable que no es extensible.

Ejercicio 7. Probar que las siguientes funciones son primitivas recursivas

a. $g : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$, $\Phi_z(u, v, w) = \Phi_{g(u,v,w)}(z)$.

b. $h : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, $\Phi_{h(n,m)}(x) = \Phi_n(x) + \Phi_m(x)$

Ejercicio 8. Probar que la siguiente función no es parcialmente computable:

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } y \in \text{ran } \ \Phi_x \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Ejercicio 9. Probar usando el teorema de la recursión que la siguiente función no es computable:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } \Phi_x(x) \neq x \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Sugerencia: considerar la función

$$g(x,y) = \begin{cases} y & \text{si } f(x) = 1 \\ y+1 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Ejercicio 10. Probar que las siguientes funciones no son computables:

$$\begin{aligned}
f_1(x) &= \begin{cases} 1 & \text{si } \Phi(x,x) = 2x \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \\
f_2(x) &= \begin{cases} 1 & \text{si dom } \Phi_x = \emptyset \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \\
f_3(x,y) &= \begin{cases} 1 & \text{si } \Phi_x = \Phi_y \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \\
f_4(x) &= \begin{cases} 1 & \text{si ran } \Phi_x \text{ es infinito} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \\
f_5(x) &= \begin{cases} 1 & \text{si } 1 \in \text{dom } \Phi_x \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}
\end{aligned}$$

Ejercicio 11. Analizar la validez de las siguientes afirmaciones:

a. Si B es r.e. entonces B es computable o $\mathbb{N} \setminus B$ es computable.

b. Si $B_1, \ldots, B_k$ son r.e. entonces $\bigcup_{n \in \{1,\ldots,k\}} B_n$ es r.e.

c. Si $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una familia de conjuntos r.e. entonces $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n$ es r.e.

Ejercicio 12. Sea B un conjunto infinito.

a. Probar que B es r.e. sii existe una función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ inyectiva y computable tal que im $f = B$.

b. Probar que B es computable sii existe una función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ computable y creciente tal que im $f = B$.

Ejercicio 13. Probar que todo conjunto r.e. infinito contiene un subconjunto computable infinito.

Ejercicio 14. Probar que si B es r.e. y f es una función parcialmente computable, entonces $\{x : f(x) \in B\}$ es r.e.

Ejercicio 15. Decidir cuáles de las funciones del Ejercicio 10 caracterizan conjuntos r.e.

Ejercicio 16. Probar que B es r.e. si y solo si se puede escribir como $B = \{x : (\exists y) P(x,y)\}$, donde P es un predicado primitivo recursivo de dos variables.

Ejercicio 17. Definir un predicado primitivo recursivo P tal que $\{x : (\forall y)P(x, y)\}$ no sea r.e.

Ejercicio 18. Sea $B = \{x : \Phi_x \text{ es una función total}\}$.

a. Probar que B no es r.e. Sugerencia: considerar $g(x) = \Phi_{f(x)}(x) + 1$, donde f es como en el Ejercicio 12.a.

b. Probar que $\mathbb{N} \setminus B$ no es r.e.

c. Probar que existe un predicado primitivo recursivo P tal que $B = \{x : (\forall y)(\exists z)P(x, y, z)\}$.

Ejercicio 19. Probar que existe un e tal que $W_e = \{e\}$.

Ejercicio 20. Demostrar que las funciones definidas en el Ejercicio 10 no son computables aplicando el Teorema de Rice.