Práctica 1 - Funciones computables

Lógica y Computabilidad

Verano 2007

Ejercicio 1. Sin usar macros, mostrar en $\mathscr{S}$ un programa que compute la función vacía $\emptyset : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$; es decir, la función que no está definida para ninguna k-upla de naturales.

Ejercicio 2. Escribir en $\mathscr{S}$ programas que computen los siguientes predicados:

a. $igual(x_1, x_2) = \begin{cases} 1 & \text{si } x_1 = x_2 \\ 0 & \text{si } x_1 \neq x_2 \end{cases}$

b. $distinto(x_1, x_2) = \begin{cases} 1 & \text{si } x_1 \neq x_2 \\ 0 & \text{si } x_1 = x_2 \end{cases}$

c. $mayor(x_1, x_2) = \begin{cases} 1 & \text{si } x_1 > x_2 \\ 0 & \text{si } x_1 \leq x_2 \end{cases}$

d. $menor(x_1, x_2) = \begin{cases} 1 & \text{si } x_1 < x_2 \\ 0 & \text{si } x_1 \geq x_2 \end{cases}$

Pueden utilizarse las macros `GOTO A` (salto incondicional), `V` $\leftarrow$ `k` (asignación de constantes) y `V1` $\leftarrow$ `V2` (asignación de variables).

Ejercicio 3. Mostrar que el lenguaje $\mathscr{S}$ es minimal, en el sentido que ninguna de las instrucciones `V` $\leftarrow$ `V + 1`, `V` $\leftarrow$ `V - 1` y `IF V` $\neq$ `0 GOTO A` puede eliminarse del lenguaje sin perder expresividad.

Ejercicio 4. Escribir en $\mathscr{S}$ programas que calculen las siguientes funciones:

a. $producto(x_1, x_2) = x_1 \cdot x_2$ (usando suma como macro)

b. $potencia(x_1, x_2) = x_1^{x_2}$ (usando producto como macro)

Además, pueden utilizarse las macros `GOTO A`, `V` $\leftarrow$ `k` y `V1` $\leftarrow$ `V2`.

Ejercicio 5. Demostrar que el lenguaje $\mathscr{S}$ cumple las siguientes propiedades:

a. Las siguientes funciones son computables:

- la función sucesor $suc : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, suc(x) = x + 1$.
- las proyecciones $u_i^n : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}, u_i^n(x_1, \ldots, x_n) = x_i$ (para i tal que $1 \leq i \leq n$).
- las funciones constantes $c_k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, c_k(x) = k$ (para cualquier $k \in \mathbb{N}$).

b. Si $f, g_1, \ldots, g_k$ son computables con $Dom(f) \subseteq \mathbb{N}^k$ y $Dom(g_i) \subseteq \mathbb{N}^r$ para todo $i \in \{1, \ldots, k\}$, entonces la composición h es computable:

$$h(x_1, \ldots, x_r) = f(g_1(x_1, \ldots, x_r), \ldots, g_k(x_1, \ldots, x_r)).$$

¿Cuál es el dominio de h?

Ejercicio 6. Usando las macros vistas en clase, escribir programas en $\mathscr{S}$ que computen las siguientes funciones:

a. $f(x) =$ el mayor número natural n tal que $2 \cdot n \leq x$

b. $P(x_1, x_2) = \begin{cases} 1 & \text{si } x_2 \text{ es múltiplo de } x_1 \\ 0 & \text{sino} \end{cases}$

Ejercicio 7. Escribir un programa que compute el mínimo común múltiplo y otro que compute el máximo común divisor entre dos números naturales. Se puede utilizar cualquier macro vista en clase.

Ejercicio 8. Sean $g : \mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{N}, s, t : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ funciones computables. Usando las macros vistas en clase, escribir programas que computen las siguientes funciones:

a. $f_1(x_1, \ldots, x_n, y) = \text{máx}\{g(x_1, \ldots, x_n, i) : 0 \leq i \leq y\}$

b. $f_2(x_1, \ldots, x_n, y) = \begin{cases} \text{máx}\{g(x_1, \ldots, x_n, i) : s(y) \leq i \leq t(y)\} & \text{si } s(y) \leq t(y) \\ 0 & \text{sino} \end{cases}$