Lógica y Computabilidad

Clases de lógica proposicional y de primer orden

Santiago Figueira

Departamento de Computación, FCEyN, UBA

Verano 2007

El lenguaje P

- símbolos $\quad p \quad ' \quad \neg \quad \rightarrow \quad (\quad)$
  - $p, p', p'', p''', \ldots$ son símbolos proposicionales
- fórmulas
  1. todo símbolo proposicional es una fórmula
  2. si φ es una fórmula entonces $\neg\varphi$ es una fórmula
  3. si φ y ψ son fórmulas entonces $(\varphi \rightarrow \psi)$ es una fórmula
  4. nada más es una fórmula
- convenciones
  - escribimos $\quad q$ por $p' \quad r$ por $p'' \quad s$ por $p'''\ldots$
  - escribimos $(\varphi \vee \psi)$ en lugar de $(\neg\varphi \rightarrow \psi)$
  - escribimos $(\varphi \wedge \psi)$ en lugar de $\neg(\varphi \rightarrow \neg\psi)$
  - escribimos φ en lugar de (φ) cuando corresponda
- llamamos PROP al conjunto de todos los símbolos proposicionales
- llamamos FORM al conjunto de todas las fórmulas

Semántica

Una interpretación es una función

$$v : \text{PROP} \rightarrow \{0, 1\}$$

A v se la llama valuación.
Una valuación v se extiende al conjunto FORM:

1. si φ es una variable proposicional p,
$$\tilde{v}(p) = v(p)$$
2. si φ es de la forma $\neg\psi$,
$$\tilde{v}(\neg\psi) = 1 - \tilde{v}(\psi)$$
3. si φ es de la forma $(\psi \rightarrow \rho)$,
$$\tilde{v}(\psi \rightarrow \rho) = \begin{cases} 1 & \text{si } \tilde{v}(\psi) = 0 \text{ o } \tilde{v}(\rho) = 1 \\ 0 & \text{sino} \end{cases}$$

Decimos que φ es verdadera para la interpretación v si $\tilde{v}(\varphi) = 1$; sino decimos que es falsa para la interpretación v.

Semántica

Observar que, por la convención

4. si φ es de la forma $(\psi \wedge \rho)$,
$$\tilde{v}(\varphi \wedge \psi) = \begin{cases} 1 & \text{si } \tilde{v}(\psi) = 1 \text{ y } \tilde{v}(\rho) = 1 \\ 0 & \text{sino} \end{cases}$$
5. si φ es de la forma $(\psi \vee \rho)$,
$$\tilde{v}(\varphi \vee \psi) = \begin{cases} 1 & \text{si } \tilde{v}(\psi) = 1 \text{ o } \tilde{v}(\rho) = 1 \\ 0 & \text{sino} \end{cases}$$

Por ejemplo, si $\quad v(p) = 1 \quad , \quad v(q) = 0 \quad , \quad v(r) = 1$

- $\tilde{v}(p \rightarrow r) = 1$
- $\tilde{v}(q \rightarrow r) = 1$
- $\tilde{v}(\neg p) = 0$
- $\tilde{v}(p \wedge q) = 0$

Tautologías y método de decisión

Una fórmula φ es una tautología ($\models \varphi$) si φ es verdadera para toda interpretación, i.e. para toda valuación v, $\tilde{v}(\varphi) = 1$.

Proposición

Sea $\varphi \in$ FORM y sean v y w son dos valuaciones tal que $v(p) = w(p)$ para toda variable proposicional que aparece en φ. Entonces $\tilde{v}(\varphi) = \tilde{w}(\varphi)$.

Existe un método de decisión para saber si φ es tautología o no:

- supongamos φ tiene variables proposicionales $p_1, \dots, p_n$
- sea $\mathcal{P}(\{p_1, \dots, p_n\}) = \{V_1, \dots, V_{2^n}\}$
- para $i \in \{1, \dots, 2^n\}$ definimos $v_i(p) = \begin{cases} 1 & \text{si } p \in V_i \\ 0 & \text{sino} \end{cases}$
- φ es tautología sii

$$\tilde{v}_i(\varphi) = 1 \text{ para todo } i \in \{1, \dots, 2^n\}$$

Consecuencia semántica y conjunto satisfacible

Sea $\Gamma \subseteq$ FORM y $\varphi \in$ FORM

φ es consecuencia semántica de Γ ($\Gamma \models \varphi$) si para toda interpretación v:

$$\underbrace{\text{si } \tilde{v}(\psi) = 1 \text{ para toda } \psi \in \Gamma}_{\text{lo notamos } \tilde{v}(\Gamma) = 1}, \text{ entonces } \tilde{v}(\varphi) = 1$$

Γ es satisfacible si existe una interpretación v tal que $\tilde{v}(\psi) = 1$ para toda $\psi \in \Gamma$ (i.e. tal que $\tilde{v}(\Gamma) = 1$)

Por ejemplo

- $\{q\} \models q$
- $\{q\} \models p \to q$
- $\{r, p \vee q\} \not\models p$
- $\{r, p \vee q\} \not\models s$
- $\emptyset$ es satisfacible
- $\{p, q\}$ es satisfacible
- $\{\neg p, p \wedge q\}$ no es satisfacible
- $\{p, p \to q, \neg q\}$ no es satisfacible

Algunos resultados sobre $\models$

Proposición

1. *$\emptyset \models \varphi$ sii $\models \varphi$ (i.e. φ es tautología)*
2. *si $\models \varphi$ entonces $\Gamma \models \varphi$*
3. *$\{\varphi\} \models \varphi$*
4. *si $\Gamma \subseteq \Delta$ y $\Gamma \models \varphi$ entonces $\Delta \models \varphi$*
5. *si $\Gamma \models \varphi$ y $\Gamma \models \varphi \to \psi$ entonces $\Gamma \models \psi$*

Demostración de 5.

- sea v una interpretación tal que $\tilde{v}(\Gamma) = 1$
- sabemos $\tilde{v}(\varphi) = 1$
- sabemos $\tilde{v}(\varphi \to \psi) = 1$
- concluimos $\tilde{v}(\psi) = 1$

$\square$

Mecanismo deductivo *SP*

- axiomas. Sean $\varphi, \psi, \rho \in$ FORM
  - SP1 $\varphi \to (\psi \to \varphi)$
  - SP2 $(\varphi \to (\psi \to \rho)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \rho))$
  - SP3 $(\neg\varphi \to \neg\psi) \to (\psi \to \varphi)$
- regla de inferencia
  - MP Sean $\varphi, \psi \in$ FORM. ψ es una consecuencia inmediata de $\varphi \to \psi$ y φ

Una demostración en *SP* es una cadena finita y no vacía

$$\varphi_1, \dots, \varphi_n$$

de fórmulas de P tal que $\varphi_n = \varphi$ y

- φ_i es un axioma o
- φ_i es una consecuencia inmediata de φ_k, φ_l, $k, l < i$

En este caso, decimos que φ es un teorema ($\vdash \varphi$)

Ejemplo: demostración de $p \to p$

Recordar

SP1 $\varphi \to (\psi \to \varphi)$

SP2 $(\varphi \to (\psi \to \rho)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \rho))$

SP3 $(\neg\varphi \to \neg\psi) \to (\psi \to \varphi)$

MP Sean $\varphi, \psi \in$ FORM. ψ es una consecuencia inmediata de $\varphi \to \psi$ y φ

Demostración:

1.	$p \to ((p \to p) \to p)$	SP1
2.	$(p \to ((p \to p) \to p)) \to ((p \to (p \to p)) \to (p \to p))$	SP2
3.	$(p \to (p \to p)) \to (p \to p)$	MP 1 y 2
4.	$p \to (p \to p)$	SP1
5.	$p \to p$	MP 3 y 4

Concluimos $\vdash p \to p$ (i.e. $p \to p$ es un teorema)

Consecuencia sintáctica

Sea $\Gamma \subseteq$ FORM y $\varphi \in$ FORM

φ es una consecuencia sintáctica de Γ ($\Gamma \vdash \varphi$) si existe una cadena finita y no vacía

$$\varphi_1, \ldots, \varphi_n$$

de fórmulas de P tal que $\varphi_n = \varphi$ y

- φ_i es un axioma o
- $\varphi_i \in \Gamma$ o
- φ_i es una consecuencia inmediata de φ_k, φ_l, $k, l < i$

Aquí, $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ se llama derivación de φ a partir de Γ. Γ se llama teoría. Decimos que φ es un teorema de la teoría Γ.

Teorema (correctitud de *SP*)

Si $\Gamma \vdash \varphi$ entonces $\Gamma \models \varphi$ (i.e. si es teorema de la teoría Γ, es válido en toda interpretación de Γ).

Ejemplos

- $\Gamma_1 = \{p\} \vdash p$
  1. p $\quad p \in \Gamma_1$
- $\Gamma_1 = \{p\} \vdash \varphi \to p$

1.	p	$p \in \Gamma_1$
2.	$p \to (\varphi \to p)$	SP1
3.	$\varphi \to p$	MP 1 y 2

- $\Gamma_1 = \{p\} \nvdash q$
  porque $\Gamma_1 \not\models q$ (considerar $v(p) = 1; v(q) = 0$)
- $\Gamma_2 = \{p, \neg p\} \vdash \varphi$

1.	$\neg p \to (\neg\varphi \to \neg p)$	SP1
2.	$\neg p$	$\neg p \in \Gamma_2$
3.	$\neg\varphi \to \neg p$	MP 1 y 2
4.	$(\neg\varphi \to \neg p) \to (p \to \varphi)$	SP3
5.	$p \to \varphi$	MP 3 y 4
6.	p	$p \in \Gamma_2$
7.	φ	MP 5 y 6

Conjuntos y sistemas consistentes

$\Gamma \subseteq$ FORM es consistente si no existe $\varphi \in$ FORM tal que

$$\Gamma \vdash \varphi \quad \text{y} \quad \Gamma \vdash \neg\varphi$$

Un sistema S es consistente si no existe $\varphi \in$ FORM tal que

$$\vdash_S \varphi \quad \text{y} \quad \vdash_S \neg\varphi$$

Teorema

El sistema SP es consistente.

Demostración.

- definamos $v(p) = 1$ para toda $p \in$ PROP
- todo axioma de SP es verdadero para v
- la regla de inferencia MP preserva validez para v
  - es decir, si $\tilde{v}(\psi) = 1$ y $\tilde{v}(\psi \to \rho) = 1$ entonces $\tilde{v}(\rho) = 1$
- concluimos que todo teorema de SP es verdadero para v
- para cualquier φ

$$\vdash \varphi \quad \Rightarrow \quad \tilde{v}(\varphi) = 1 \quad \Rightarrow \quad \tilde{v}(\neg\varphi) = 0 \quad \Rightarrow \quad \nvdash \neg\varphi$$

- luego no puede pasar que φ y $\neg\varphi$ sean teoremas

□

Algunos resultados sobre $\vdash$

Proposición

1. *$\emptyset \vdash \varphi$ sii $\vdash \varphi$ (i.e. φ es teorema)*
2. *si $\vdash \varphi$ entonces $\Gamma \vdash \varphi$*
3. *$\{\varphi\} \vdash \varphi$*
4. *si $\Gamma \subseteq \Delta$ y $\Gamma \vdash \varphi$ entonces $\Delta \vdash \varphi$*
5. *si $\Gamma \vdash \varphi$ y $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$ entonces $\Gamma \vdash \psi$*

Si reemplazamos $\vdash$ por $\models$, obtenemos los mismos resultados (ver hoja 7)

Resumen

lenguaje P

semántica	método deductivo
tautología (verdadera en toda interpretación)	teorema (tiene demostración en SP)
consecuencia semántica $\models$	consecuencia sintáctica $\vdash$
conjunto satisfacible (existe modelo para todos sus elementos)	conjunto consistente (no permite probar φ y $\neg\varphi$)

Notas sobre computabilidad

Se pueden codificar las fórmulas de P con números naturales.
El conjunto $\{\varphi : \varphi \text{ es un axioma de } SP\}$ es computable.

Se pueden codificar las demostraciones de SP con listas.
El conjunto $D = \{d : d \text{ es una demostración en } SP\}$ es computable.

Entonces

- considerar el siguiente programa P:

$$
\begin{array}{ll}
[A] & \text{IF } T \in D \wedge T[|T|] = X \text{ GOTO } E \\
 & T \leftarrow T + 1 \\
 & \text{GOTO } A
\end{array}
$$

- conjunto de teoremas de $SP = \{\varphi : \Psi_P(\varphi) \downarrow\}$
- el conjunto de teoremas del sistema SP es r.e.

¿El conjunto de teoremas de SP es computable?

El Teorema de la Deducción

Teorema
Si $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \psi$ entonces $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$

Demostración.
Por inducción en la longitud de la demostración de $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \psi$.
Supongamos que

$$\varphi_1, \dots, \varphi_n$$

es una derivación de ψ a partir de $\Gamma \cup \{\varphi\}$.

- caso base ($n = 1$)
- paso inductivo
  - HI: para toda derivación de ψ' a partir de $\Gamma \cup \{\varphi\}$ de longitud $< n$ tenemos $\Gamma \vdash \varphi \to \psi'$
  - probamos que para una demostración de longitud n de $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \psi$ tenemos $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$.

$\square$

Demostración del Teorema de la Deducción (caso base)

Supongamos

- $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ es una derivación de ψ a partir de $\Gamma \cup \{\varphi\}$
- $n = 1$ (i.e. la derivación es una sola fórmula $\varphi_1 = \psi$)

Queremos ver que $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$. Hay 3 posibilidades:

1. ψ es un axioma de SP

$$\left.\begin{array}{lll} 1. & \psi & \psi \text{ es axioma} \\ 2. & \psi \to (\varphi \to \psi) & \text{SP1} \\ 3. & \varphi \to \psi & \text{MP 1,2} \end{array}\right\} \vdash \varphi \to \psi$$

2. $\psi \in \Gamma$

$$\left.\begin{array}{lll} 1. & \psi & \psi \in \Gamma \\ 2. & \psi \to (\varphi \to \psi) & \text{SP1} \\ 3. & \varphi \to \psi & \text{MP 1,2} \end{array}\right\} \Gamma \vdash \varphi \to \psi$$

3. $\psi = \varphi$
   vimos que $\vdash p \to p$.
   la misma demostración sirve para probar $\vdash \varphi \to \varphi$

Demostración del Teorema de la Deducción (paso inductivo)

Supongamos

$$\varphi_1, \ldots, \varphi_n$$

es una derivación de ψ a partir de $\Gamma \cup \{\varphi\}$

HI: para toda derivación de ψ' a partir de $\Gamma \cup \{\varphi\}$ de longitud $< n$ tenemos $\Gamma \vdash \varphi \to \psi'$

Queremos ver que $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$. Hay 4 posibilidades:

1. ψ es un axioma de SP: igual que en en caso base
2. $\psi \in \Gamma$: igual que en en caso base
3. $\psi = \varphi$: igual que en en caso base
4. ψ se infiere por MP de φ_i y φ_j $(i, j < n)$
   - sin pérdida de generalidad, $\varphi_j = \varphi_i \to \psi$
   - $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \varphi_i$ y la demostración tiene longitud $< n$
   - por HI $\Gamma \vdash \varphi \to \varphi_i$
   - $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \varphi_j$ y la demostración tiene longitud $< n$
   - por HI $\Gamma \vdash \varphi \to \varphi_j$, i.e. $\Gamma \vdash \varphi \to (\varphi_i \to \psi)$
   - sabemos (SP2) $\vdash (\varphi \to (\varphi_i \to \psi)) \to ((\varphi \to \varphi_i) \to (\varphi \to \psi))$
   - por MP 2 veces $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$

Conjuntos consistentes

Proposición

1. *$\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ es inconsistente sii $\Gamma \vdash \varphi$*
2. *$\Gamma \cup \{\varphi\}$ es inconsistente sii $\Gamma \vdash \neg\varphi$*

Demostración de 1.

$(\Leftarrow)$
$$\left.\begin{array}{lll} \Gamma \vdash \varphi & \Rightarrow & \Gamma \cup \{\neg\varphi\} \vdash \varphi \\ \text{trivialmente} & & \Gamma \cup \{\neg\varphi\} \vdash \neg\varphi \end{array}\right\} \Gamma \cup \{\neg\varphi\} \text{ es inconsistente}$$

$(\Rightarrow)$ existe ψ tal que $\Gamma \cup \{\neg\varphi\} \vdash \psi$ y $\Gamma \cup \{\neg\varphi\} \vdash \neg\psi$
por el Teorema de la Deducción,

$$\Gamma \vdash \neg\varphi \to \psi \quad \text{y} \quad \Gamma \vdash \neg\varphi \to \neg\psi$$

se puede ver que $\vdash (\neg\varphi \to \psi) \to ((\neg\varphi \to \neg\psi) \to \varphi)$
por MP 2 veces tenemos $\Gamma \vdash \varphi$

$\square$

Satisfacible $\Rightarrow$ consistente

Teorema

Si $\Gamma \subseteq$ FORM es satisfacible entonces Γ es consistente.

Demostración.

- supongamos v tal que $\tilde{v}(\Gamma) = 1$ pero Γ es inconsistente
- existe ψ tal que $\Gamma \vdash \psi$ y $\Gamma \vdash \neg\psi$
- por correctitud de *SP*, $\Gamma \models \psi$ y $\Gamma \models \neg\psi$
- $\tilde{v}(\psi) = 1$ y $\tilde{v}(\neg\psi) = 1$

$\square$

Lema de Lindenbaum

$\Gamma \subseteq$ FORM es maximal consistente (m.c.) en *SP* si

- Γ es consistente y
- para toda fórmula φ
  - $\varphi \in \Gamma$ o
  - existe ψ tal que $\quad \Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \psi \quad$ y $\quad \Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \neg\psi$

Lema

Si $\Gamma \subseteq$ FORM *es consistente, existe* Γ' *m.c. tal que* $\Gamma \subseteq \Gamma'$.

Demostración del Lema de Lindenbaum (obtener $\Gamma' \supseteq \Gamma$ m.c.)

Enumeramos todas las fórmulas: $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ Definimos

- $\Gamma_0 = \Gamma$
- $\Gamma_{n+1} = \begin{cases} \Gamma_n \cup \{\varphi_{n+1}\} & \text{si } \Gamma_n \cup \{\varphi_{n+1}\} \text{ es consistente} \\ \Gamma_n & \text{sino} \end{cases}$
- $\Gamma' = \bigcup_{i \geq 0} \Gamma_i$

Tenemos

1. $\Gamma' \supseteq \Gamma$
2. cada Γ_i es consistente
3. Γ' es consistente
   - si no, existe ψ tal que $\quad \Gamma' \vdash \psi \quad$ y $\quad \Gamma' \vdash \neg\psi$
   - en ambas demostraciones aparecen únicamente $\{\gamma_1, \ldots, \gamma_k\} \in \Gamma'$.
   - sea j suficientemente grande tal que $\{\gamma_1, \ldots, \gamma_k\} \subseteq \Gamma_j$
   - entonces $\quad \Gamma_j \vdash \psi \quad$ y $\quad \Gamma_j \vdash \neg\psi$; $\quad$ contradice 2.
4. Γ' es maximal
   - supongamos $\varphi \notin \Gamma'$. Debe existir n tal que $\varphi_{n+1} = \varphi$
   - $\varphi_{n+1} \notin \Gamma_{n+1}$, entonces $\Gamma_n \cup \{\varphi_{n+1}\}$ es inconsistente
   - luego $\Gamma' \cup \{\varphi_{n+1}\}$ es inconsistente (pues $\Gamma' \supseteq \Gamma_n$)

Conjuntos maximales consistentes

Proposición

Si Γ' *es m.c. entonces o bien* $\varphi \in \Gamma'$ *o bien* $\neg\varphi \in \Gamma'$.

Demostración.

- no puede ser que φ y $\neg\varphi$ estén en Γ' porque sería inconsistente
- supongamos que ninguna está. Como Γ' es maximal

$$\left.\begin{array}{lcl} \Gamma' \cup \{\varphi\} \text{ es inconsistente} & \Rightarrow & \Gamma' \vdash \neg\varphi \\ \Gamma' \cup \{\neg\varphi\} \text{ es inconsistente} & \Rightarrow & \Gamma' \vdash \varphi \end{array}\right\} \Gamma' \text{ inconsistente}$$

$\square$

Proposición

Sea Γ' *m.c.* $\Gamma' \vdash \varphi$ *sii* $\varphi \in \Gamma'$.

Consistente $\Rightarrow$ satisfacible

Teorema

Si $\Gamma \subseteq$ FORM *es consistente entonces* Γ *es satisfacible.*

Demostración.

Dado Γ consistente, construimos $\Gamma' \supseteq \Gamma$ m.c. (Lindenbaum)

Definimos la interpretación v tal que

$$v(p) = 1 \text{ sii } p \in \Gamma'$$

Veamos $\tilde{v}(\varphi) = 1$ sii $\varphi \in \Gamma'$ por inducción en la complejidad de φ

- caso base: $\varphi = p$. Trivial por definición de v.
- paso inductivo:
  HI: $\tilde{v}(\varphi) = 1$ sii $\varphi \in \Gamma'$ para toda φ de complejidad $< m$
  Sea φ de complejidad m. Hay 2 casos:
  1. $\varphi = \neg\psi$
  2. $\varphi = \psi \rightarrow \rho$

$\square$

Demostración de consistente $\Rightarrow$ satisfacible (caso $\varphi = \neg\psi$)

HI: $\tilde{v}(\varphi) = 1$ sii $\varphi \in \Gamma'$ para toda φ de complejidad $< m$

$\varphi = \neg\psi$ tiene complejidad m.

Quiero probar que $\tilde{v}(\varphi) = 1$ sii $\varphi \in \Gamma'$

($\Rightarrow$) $\tilde{v}(\varphi) = 1 \Rightarrow \tilde{v}(\psi) = 0 \overset{HI}{\Rightarrow} \psi \notin \Gamma' \Rightarrow \neg\psi \in \Gamma' \Rightarrow \varphi \in \Gamma'$

($\Leftarrow$) $\varphi \in \Gamma' \Rightarrow \psi \notin \Gamma' \overset{HI}{\Rightarrow} \tilde{v}(\psi) = 0 \Rightarrow \tilde{v}(\neg\psi) = 1 \Rightarrow \tilde{v}(\varphi) = 1$

Demostración de consistente $\Rightarrow$ satisfacible (caso $\varphi = \psi \rightarrow \rho$)

HI: $\tilde{v}(\varphi) = 1$ sii $\varphi \in \Gamma'$ para toda φ de complejidad $< m$

$\varphi = \psi \rightarrow \rho$ tiene complejidad m.

Quiero probar que $\tilde{v}(\varphi) = 1$ sii $\varphi \in \Gamma'$

($\Rightarrow$) $\tilde{v}(\varphi) = 1 \Rightarrow \tilde{v}(\psi \rightarrow \rho) = 1 \Rightarrow \tilde{v}(\psi) = 0$ o $\tilde{v}(\rho) = 1$

- $\tilde{v}(\psi) = 0 \overset{HI}{\Rightarrow} \psi \notin \Gamma' \Rightarrow \neg\psi \in \Gamma' \Rightarrow \Gamma' \vdash \neg\psi$
  sabemos $\vdash \neg\psi \rightarrow (\psi \rightarrow \rho)$
  por MP $\Gamma' \vdash \psi \rightarrow \rho$
  entonces $\psi \rightarrow \rho \in \Gamma'$
- $\tilde{v}(\rho) = 1 \overset{HI}{\Rightarrow} \rho \in \Gamma' \Rightarrow \Gamma' \vdash \rho$
  sabemos $\vdash \rho \rightarrow (\psi \rightarrow \rho)$.
  por MP $\Gamma' \vdash \psi \rightarrow \rho$
  entonces $\psi \rightarrow \rho \in \Gamma'$

($\Leftarrow$) $\tilde{v}(\varphi) = 0 \Rightarrow \tilde{v}(\psi) = 1$ y $\tilde{v}(\rho) = 0 \overset{HI}{\Rightarrow} \psi \in \Gamma'$ y $\rho \notin \Gamma'$
$\psi \in \Gamma'$ y $\neg\rho \in \Gamma' \quad \Rightarrow \quad \Gamma' \vdash \psi$ y $\Gamma' \vdash \neg\rho$
sabemos $\vdash \psi \rightarrow (\neg\rho \rightarrow \neg(\psi \rightarrow \rho))$
aplicando MP 2 veces, $\Gamma' \vdash \neg(\psi \rightarrow \rho)$
por lo tanto $\neg(\psi \rightarrow \rho) \in \Gamma'$
entonces $\psi \rightarrow \rho \notin \Gamma'$

Teorema de Completitud (fuerte)

Probamos que

- Γ consistente sii Γ satisfacible
- $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ es inconsistente sii $\Gamma \vdash \varphi$

Teorema
Si $\Gamma \models \varphi$ entonces $\Gamma \vdash \varphi$.

Demostración.

- supongamos $\Gamma \models \varphi$
- $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ es insatisfacible
- $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ es inconsistente
- $\Gamma \vdash \varphi$

$\square$

Consecuencias del Teorema de Completitud

Corolario
$\Gamma \vdash \varphi$ *sii* $\Gamma \models \varphi$

Corolario
$\vdash \varphi$ *sii* $\models \varphi$ *(i.e. φ es un teorema de SP sii es tautología)*

Teorema (Compacidad)
Sea $\Gamma \subseteq$ FORM. Si todo Δ finito, $\Delta \subseteq \Gamma$ es satisfacible, entonces Γ es satisfacible.

Demostración.

- supongamos Γ insatisfacible
- Γ es inconsistente
- existe ψ tal que $\quad \Gamma \vdash \psi \quad$ y $\quad \Gamma \vdash \neg\psi$
- se usan solo finitos axiomas de Γ
- existe $\Delta \subseteq \Gamma$ finito tal que $\Delta \vdash \psi$ y $\Delta \vdash \neg\psi$
- Δ es inconsistente
- Δ es insatisfacible

$\square$

Resumen

lenguaje P

semántica | método deductivo

tautología $\longleftrightarrow$ teorema
(verdadera en toda interpretación) (tiene demostración en SP)

consecuencia semántica $\models$ $\longleftrightarrow$ consecuencia sintáctica $\vdash$

conjunto satisfacible $\longleftrightarrow$ conjunto consistente
(existe modelo para todos sus elementos) (no permite probar φ y $\neg\varphi$)

Notas sobre computabilidad

Habíamos visto que el conjunto de teoremas de *SP* es r.e.

Vemos que es computable:

método de decisión = tablas de verdad

$$\vdash \varphi \quad \textit{sii} \quad \models \varphi$$

$\vdash \varphi$ sii en la tabla de verdad de φ solo hay 1s en la última columna

Propiedades de las valuaciones

Proposición

Sean $\varphi, \psi \in$ FORM y v una valuación

$R_\neg$	$\tilde{v}(\neg\neg\varphi) = 1$	*sii*	$\tilde{v}(\varphi) = 1$
$R_\vee$	$\tilde{v}(\varphi \vee \psi) = 1$	*sii*	$\tilde{v}(\varphi) = 1$ *o* $\tilde{v}(\psi) = 1$
$R_\wedge$	$\tilde{v}(\varphi \wedge \psi) = 1$	*sii*	$\tilde{v}(\varphi) = 1$ *y* $\tilde{v}(\psi) = 1$
$R_\to$	$\tilde{v}(\varphi \to \psi) = 1$	*sii*	$\tilde{v}(\varphi) = 0$ *o* $\tilde{v}(\psi) = 1$
$R_{\neg\vee}$	$\tilde{v}(\neg(\varphi \vee \psi)) = 1$	*sii*	$\tilde{v}(\varphi) = 0$ *y* $\tilde{v}(\psi) = 0$
$R_{\neg\wedge}$	$\tilde{v}(\neg(\varphi \wedge \psi)) = 1$	*sii*	$\tilde{v}(\varphi) = 0$ *o* $\tilde{v}(\psi) = 0$
$R_{\neg\to}$	$\tilde{v}(\neg(\varphi \to \psi)) = 1$	*sii*	$\tilde{v}(\varphi) = 1$ *y* $\tilde{v}(\psi) = 0$

Reglas

$R_\neg$
$$\begin{array}{c} \neg\neg\varphi \\ \varphi \end{array}$$

$R_\vee$
$$\begin{array}{cc} \multicolumn{2}{c}{(\varphi \vee \psi)} \\ \varphi & \psi \end{array}$$

$R_{\neg\vee}$
$$\begin{array}{c} \neg(\varphi \vee \psi) \\ \neg\varphi \\ \neg\psi \end{array}$$

$R_\wedge$
$$\begin{array}{c} (\varphi \wedge \psi) \\ \varphi \\ \psi \end{array}$$

$R_{\neg\wedge}$
$$\begin{array}{cc} \multicolumn{2}{c}{\neg(\varphi \wedge \psi)} \\ \neg\varphi & \neg\psi \end{array}$$

$R_\to$
$$\begin{array}{cc} \multicolumn{2}{c}{(\varphi \to \psi)} \\ \neg\varphi & \psi \end{array}$$

$R_{\neg\to}$
$$\begin{array}{c} \neg(\varphi \to \psi) \\ \varphi \\ \neg\psi \end{array}$$

Ejemplo: $\varphi = ((p \vee q) \to r) \to ((p \to r) \wedge (q \to r))$

$R_\neg$: $\neg\neg\varphi$ / φ

$R_\vee$: $(\varphi \vee \psi)$ / $\varphi \quad \psi$

$R_\wedge$: $(\varphi \wedge \psi)$ / φ / ψ

$R_\to$: $(\varphi \to \psi)$ / $\neg\varphi \quad \psi$

$R_{\neg\vee}$: $\neg(\varphi \vee \psi)$ / $\neg\varphi$ / $\neg\psi$

$R_{\neg\wedge}$: $\neg(\varphi \wedge \psi)$ / $\neg\varphi \quad \neg\psi$

$R_{\neg\to}$: $\neg(\varphi \to \psi)$ / φ / $\neg\psi$

$$\neg(((p \vee q) \to r) \to ((p \to r) \wedge (q \to r)))$$
$$(p \vee q) \to r$$
$$\neg((p \to r) \wedge (q \to r))$$

$\neg(p \vee q)$		r	
$\neg(p \to r)$	$\neg(q \to r)$	$\neg(p \to r)$	$\neg(q \to r)$
p	q	p	q
$\neg r$	$\neg r$	$\neg r$	$\neg r$
$\neg p$	$\neg p$	$\times$	$\times$
$\neg q$	$\neg q$		
$\times$	$\times$		

Todas las ramas cerradas $\Rightarrow$ no existe valuación que satisfaga a $\neg\varphi$. Por lo tanto, φ es tautología.

Ejemplo: $\psi = (p \wedge q) \to \neg(p \vee \neg q)$

$R_\neg$: $\neg\neg\varphi$ / φ

$R_\vee$: $(\varphi \vee \psi)$ / $\varphi \quad \psi$

$R_\wedge$: $(\varphi \wedge \psi)$ / φ / ψ

$R_\to$: $(\varphi \to \psi)$ / $\neg\varphi \quad \psi$

$R_{\neg\vee}$: $\neg(\varphi \vee \psi)$ / $\neg\varphi$ / $\neg\psi$

$R_{\neg\wedge}$: $\neg(\varphi \wedge \psi)$ / $\neg\varphi \quad \neg\psi$

$R_{\neg\to}$: $\neg(\varphi \to \psi)$ / φ / ψ

$$\neg((p \wedge q) \to \neg(p \vee \neg q))$$
$$(p \wedge q)$$
$$\neg\neg(p \vee \neg q)$$
$$(p \vee \neg q)$$
$$p$$
$$q$$

p	$\neg q$
	$\times$

Existe una rama abierta $\Rightarrow$ $\neg\psi$ es satisfacible $\Rightarrow$ ψ no es tautología.

Definimos $v(p) = 1, v(q) = 1$. Tenemos $\tilde{v}(\neg\psi) = 1$.

Ramas cerradas y saturadas

Una rama de un árbol es cerrada si contiene a la vez una fórmula y su negación. Sino, se dice abierta.

Un árbol se dice cerrado si todas sus ramas son cerradas

Una rama es saturada si el conjunto de fórmulas de sus nodos es saturado, en el siguiente sentido:

Un conjunto $\Gamma \subseteq FORM$ es saturado si

1. una fórmula y su negación no pueden estar simultáneamente en Γ
2. si una fórmula es de tipo $\neg\neg\varphi$, su conclusión (i.e. φ) está en Γ
3. si una fórmula es de tipo $(\varphi \wedge \psi)$, $\neg(\varphi \vee \psi)$, $\neg(\varphi \to \psi)$, sus dos conclusiones están en Γ
4. si una fórmula es de tipo $(\varphi \vee \psi)$, $\neg(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \to \psi)$, al menos una de sus conclusiones está en Γ

Un árbol es completo si cada una de sus ramas es cerrada o saturada.

Propiedades

Teorema

Todo conjunto saturado es satisfacible.

Idea de la demostración.

Parecida a la demostración de consistente $\Rightarrow$ satisfacible.
Sea Γ un conjunto saturado. Definir

$$v(p) = 1 \text{ sii } p \in \Gamma$$

Probar que $\tilde{v}(\varphi) = 1$ sii $\varphi \in \Gamma$ por inducción en φ.

$\square$

Teorema

Toda fórmula tiene por lo menos un árbol completo.

Idea de la demostración.

Cada regla disminuye la complejidad de la fórmula.
Ojo: ¿qué tipo de complejidad?

$(\varphi \to \psi)$ / $\neg\varphi \quad \psi$

$\square$

Satisfacible $\Rightarrow$ rama abierta en cualquier árbol

Teorema

Si φ es satisfacible, entonces todo árbol para φ tiene al menos una rama abierta.

Demostración.

Por inducción en la altura del árbol $\mathcal{A}$.

- caso base: $\mathcal{A}$ tiene altura 1. $\mathcal{A}$ es un solo nodo formado por φ.
- paso inductivo:
  HI: todo árbol para φ de altura n tiene una rama abierta
  - supongamos un árbol $\mathcal{A}$ para φ de altura $n+1$
  - sea $\mathcal{A}'$ el resultado de sacar el último nivel de $\mathcal{A}$
  - $\mathcal{A}'$ tiene altura n por lo tanto tiene una rama abierta S
  - si S es una rama de $\mathcal{A}$, listo
  - sino, hay 2 casos

S

$\psi \quad \rho$

$S \cup \{\psi\}$ o $S \cup \{\psi\}$ es satisfacible

S

ψ

$S \cup \{\psi\}$ es satisfacible

$\square$

Equivalencias

Teorema

Son equivalentes:

1. *φ es satisfacible*
2. *todo árbol para φ tiene por lo menos una rama abierta*
3. *existe un árbol completo para φ con una rama abierta*

Demostración.

($1 \Rightarrow 2$) lo recién visto

($2 \Rightarrow 3$) siempre hay un árbol completo para φ

($3 \Rightarrow 1$) considerar un árbol completo para φ con una rama abierta S

- las fórmulas de S constituyen un conjunto saturado
- S es satisfacible.
- en particular la primera fórmula de S (i.e. φ) es satisfacible

$\square$

Método de decisión

Corolario

Son equivalentes:

1. *φ es insatisfacible*
2. *φ tiene un árbol cerrado*
3. *todo árbol completo de φ es cerrado*

Corolario

Son equivalentes:

1. *φ es tautología*
2. *$\neg\varphi$ tiene un árbol cerrado*
3. *todo árbol completo de $\neg\varphi$ es cerrado*

método de decisión alternativo al de las tablas de verdad:

- dada φ, construir algún árbol completo para $\neg\varphi$
- si es cerrado, φ es tautología
- sino, φ no es tautología (y el árbol da v tal que $\tilde{v}(\varphi) = 0$)

Lenguajes de primer orden

- símbolos lógicos y auxiliares: $x \quad ' \quad \forall \quad \neg \quad \rightarrow \quad (\quad)$
  - $x', x'', x''', \ldots$ son variables
    - VAR es el conjunto de variables
  - $\forall$ se llama cuantificador universal
- símbolos de cada lenguaje particular $\mathcal{L} = \mathcal{C} \cup \mathcal{F} \cup \mathcal{P}$, donde
  - $\mathcal{C}$ es un conjunto de símbolos de constantes (puede ser $\mathcal{C} = \emptyset$)
  - $\mathcal{F}$ es un conjunto de símbolos de funciones (puede ser $\mathcal{F} = \emptyset$)
  - $\mathcal{P}$ es un conjunto de símbolos de predicados ($\mathcal{P} \neq \emptyset$)

Términos

Para un lenguaje fijo $\mathcal{L}$, definimos los términos de $\mathcal{L}$:

1. toda variable es un término
2. todo símbolo de constante de $\mathcal{L}$ es un término
3. si f es un símbolo de función n-ádico de $\mathcal{L}$ y $t_1, \ldots, t_n$ son términos de $\mathcal{L}$, entonces $f(t_1, \ldots, t_n)$ es un término de $\mathcal{L}$
4. nada más es un término de $\mathcal{L}$

TERM($\mathcal{L}$) es el conjunto de todos los términos del lenguaje $\mathcal{L}$

Por ejemplo, para $\mathcal{L} = \mathcal{C} \cup \mathcal{F} \cup \mathcal{P}$, con $\mathcal{C} = \{c, d\}$, $\mathcal{F} = \{f\}$ y $\mathcal{P} = \{R\}$ (f de aridad 3, R binario) son términos:

$$c \quad , \quad d \quad , \quad x \quad , \quad f(c, d, x') \quad , \quad f(c, f(x''', x'', x''), x')$$

Fórmulas

Para un lenguaje fijo $\mathcal{L}$, definimos las fórmulas de $\mathcal{L}$:

1. si P es un símbolo de predicado n-ádico de $\mathcal{L}$ y $t_1, \ldots, t_n$ son términos de $\mathcal{L}$, entonces $P(t_1, \ldots, t_n)$ es una fórmula de $\mathcal{L}$ (atómica)
2. si φ es una fórmula de $\mathcal{L}$ entonces $\neg\varphi$ es una fórmula de $\mathcal{L}$
3. si φ, ψ son fórmulas de $\mathcal{L}$ entonces $(\varphi \to \psi)$ es una fórmula de $\mathcal{L}$
4. si φ es una fórmula de $\mathcal{L}$ y x una variable entonces $(\forall x)\varphi$ es una fórmula de $\mathcal{L}$
5. nada más es una fórmula de $\mathcal{L}$

FORM($\mathcal{L}$) es el conjunto de todas las fórmulas del lenguaje $\mathcal{L}$

Por ejemplo, para $\mathcal{L} = \mathcal{C} \cup \mathcal{F} \cup \mathcal{P}$, con $\mathcal{C} = \{c, d\}$, $\mathcal{F} = \{f\}$ y $\mathcal{P} = \{R\}$ (f de aridad 3, R binario) son fórmulas:

$$R(d, x') \quad , \quad (\forall x')\ R(d, x'') \quad , \quad (\forall x'')\ R(f(x'', x', x'''), d)$$

Convenciones

- usamos $x, y, z, \ldots$ para variables
- usamos $a, b, c, d, \ldots$ para símbolos de constante
- usamos $f, g, h, \ldots$ para símbolos de función (la aridad siempre va a quedar clara del contexto)
- usamos $P, Q, R, \ldots$ para símbolos de predicado (la aridad siempre va a quedar clara del contexto)
- escribimos $(\exists x)\varphi$ en lugar de $\neg(\forall x)\neg\varphi$
- escribimos $(\varphi \vee \psi)$ en lugar de $(\neg\varphi \to \psi)$
- escribimos $(\varphi \wedge \psi)$ en lugar de $\neg(\varphi \to \neg\psi)$
- escribimos φ en lugar de (φ) cuando corresponda

Variables libres y ligadas

- una aparición de una variable x en una fórmula está ligada si está dentro del alcance de un cuantificador. En caso contrario, dicha aparición está libre.
- una variable está libre en una fórmula si todas sus apariciones están libres.
- una variable está ligada en una fórmula si todas sus apariciones están ligadas.
- una fórmula es una sentencia si no tiene variables libres

Por ejemplo, (para un lenguaje con P símbolo de predicado binario)

- en $P(x, y)$, x está libre
- en $(\forall y)\ P(x, y)$, x está libre
- en $(\forall x)\ P(x, y)$, x está ligada
- en $(\forall x)(\forall y)\ P(x, y)$, x está ligada
- en $P(x, y) \to (\forall x)(\forall y)\ P(x, y)$
  - la primera aparición de x está libre
  - la segunda aparición de x está ligada

Interpretación de un lenguaje

Una $\mathcal{L}$-estructura $\mathcal{A}$ de un lenguaje $\mathcal{L} = \mathcal{C} \cup \mathcal{F} \cup \mathcal{P}$ es

- un conjunto A no vacío (se llama universo)
- las siguientes asignaciones:
  - para cada símbolo de constante $c \in \mathcal{C}$, un elemento fijo
  $$c_{\mathcal{A}} \in A$$
  - para cada símbolo de función n-aria $f \in \mathcal{F}$, una función
  $$f_{\mathcal{A}} : A^n \to A$$
  - para cada símbolo de predicado n-ario $P \in \mathcal{P}$, una relación
  $$P_{\mathcal{A}} \subseteq A^n$$

Las funciones $f_{\mathcal{A}}$ y predicados $P_{\mathcal{A}}$ son siempre totales.

Ejemplos

Para $\mathcal{L} = \mathcal{C} \cup \mathcal{F} \cup \mathcal{P}$, con $\mathcal{C} = \{c, d\}$, $\mathcal{F} = \{f, g\}$ y $\mathcal{P} = \{P\}$
(f unaria, g binaria, P binario)

$\mathcal{L}$-estructura $\mathcal{A}$

- $A = \mathbb{Z}$
- $c_{\mathcal{A}} = 0$
- $d_{\mathcal{A}} = 1$
- $f_{\mathcal{A}}(x) = -x$
- $g_{\mathcal{A}}(x, y) = x + y$
- $P_{\mathcal{A}}(x, y)$ sii x divide a y

$\mathcal{L}$-estructura $\mathcal{B}$

- $B = \mathcal{P}(\mathbb{N})$
- $c_{\mathcal{B}} = \emptyset$
- $d_{\mathcal{B}} = \mathbb{N}$
- $f_{\mathcal{B}}(x) = \overline{x}$
- $g_{\mathcal{B}}(x, y) = x \cup y$
- $P_{\mathcal{B}}(x, y)$ sii $x \subseteq y$

No ejemplos

Para $\mathcal{L} = \mathcal{C} \cup \mathcal{F} \cup \mathcal{P}$, con $\mathcal{C} = \{c, d\}$, $\mathcal{F} = \{f, g\}$ y $\mathcal{P} = \{P\}$
(f unaria, g binaria, P binario)

$\mathcal{L}$-estructura $\mathcal{M}$

- $M = \mathbb{Z}$
- $c_{\mathcal{M}} = 0$
- $d_{\mathcal{M}} = 1$
- $f_{\mathcal{M}}(x) = 1/x$
- $g_{\mathcal{M}}(x, y) = x^y$
- $P_{\mathcal{M}}(x, y)$ sii x divide a y

en general

- $1/x \notin \mathbb{Z}$
- $x^y \notin \mathbb{Z}$

$\mathcal{L}$-estructura $\mathcal{N}$

- $N =$ funciones $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$
- $c_{\mathcal{N}} =$ función identidad
- $d_{\mathcal{N}} =$ función constante 3
- $f_{\mathcal{N}}(x) =$ derivada de x
- $g_{\mathcal{N}}(x, y) = x \circ y$
- $P_{\mathcal{N}}(x, y)$ sii $x = y$

una función $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ puede no ser derivable

Valuaciones

Fijemos una $\mathcal{L}$-estructura $\mathcal{A}$.

Una valuación para $\mathcal{A}$ es una función $v : \mathrm{VAR} \to A$

Extendemos v a $\tilde{v} : \mathrm{TERM}(\mathcal{L}) \to A$, que interpreta un término t en una $\mathcal{L}$-estructura $\mathcal{A}$:

- si $t = x$ (variable) entonces
$$\tilde{v}(t) = v(x)$$
- si $t = c$ (constante) entonces
$$\tilde{v}(t) = c_{\mathcal{A}}$$
- si $t = f(t_1, \dots, t_n)$ (función) entonces
$$\tilde{v}(t) = f_{\mathcal{A}}(\tilde{v}(t_1), \dots, \tilde{v}(t_n))$$

Sea v una valuación de $\mathcal{A}$ y sea $a \in A$. Definimos la valuación $v(x = a)$ de la siguiente manera

$$v(x = a)\ (y) = \begin{cases} v(y) & x \neq y \\ a & x = y \end{cases}$$

Ejemplos

Para $\mathcal{L} = \mathcal{C} \cup \mathcal{F} \cup \mathcal{P}$, con $\mathcal{C} = \{c, d\}$, $\mathcal{F} = \{f, g\}$ y $\mathcal{P} = \{P\}$
(f unaria, g binaria, P binario)

$\mathcal{L}$-estructura $\mathcal{A}$

- $A = \mathbb{Z}$
- $c_{\mathcal{A}} = 0$
- $d_{\mathcal{A}} = 1$
- $f_{\mathcal{A}}(x) = -x$
- $g_{\mathcal{A}}(x, y) = x + y$
- $P_{\mathcal{A}}(x, y)$ sii x divide a y

Tenemos

- si $v(x) = 2$

  $\tilde{v}(g(x, f(d))) = 2 + (-1) = 1$

- para cualquier v

  $\tilde{v}(g(c, f(d))) = 0 + (-1) = -1$

$\mathcal{L}$-estructura $\mathcal{B}$

- $B = \mathcal{P}(\mathbb{N})$
- $c_{\mathcal{B}} = \emptyset$
- $d_{\mathcal{B}} = \mathbb{N}$
- $f_{\mathcal{B}}(x) = \overline{x}$
- $g_{\mathcal{B}}(x, y) = x \cup y$
- $P_{\mathcal{B}}(x, y)$ sii $x \subseteq y$

Tenemos

- si $v(x) = \{1, 2\}$

  $\tilde{v}(g(x, f(d))) = \{1, 2\} \cup \overline{\mathbb{N}} = \{1, 2\}$

- para cualquier v

  $\tilde{v}(g(c, f(d))) = \emptyset \cup \overline{\mathbb{N}} = \emptyset$

Interpretación de una fórmula

Sea $\mathcal{A}$ una $\mathcal{L}$-estructura y v una valuación de $\mathcal{A}$. Definimos cuando φ es verdadera en $\mathcal{A}$ bajo la valuación v ($\mathcal{A} \models \varphi[v]$)

1. φ es de la forma $P(t_1, \ldots, t_n)$ (atómica)

$$\mathcal{A} \models P(t_1, \ldots, t_n)[v] \quad \textit{sii} \quad (\tilde{v}(t_1), \ldots, \tilde{v}(t_1)) \in P_{\mathcal{A}}$$

2. φ es de la forma $\neg\psi$

$$\mathcal{A} \models \neg\psi[v] \quad \textit{sii} \quad \text{no } \mathcal{A} \models \psi[v]$$

3. φ es de la forma $(\psi \to \rho)$

$$\mathcal{A} \models (\psi \to \rho)[v] \quad \textit{sii} \quad \text{no } \mathcal{A} \models \psi[v] \text{ o } \mathcal{A} \models \rho[v]$$

4. φ es de la forma $(\forall x)\psi$

$$\mathcal{A} \models (\forall x)\psi[v] \quad \textit{sii} \quad \text{para cualuier } a \in A,\ \mathcal{A} \models \psi[v(x = a)]$$

Ejemplos

Para $\mathcal{L} = \mathcal{C} \cup \mathcal{F} \cup \mathcal{P}$, con $\mathcal{C} = \{c, d\}$, $\mathcal{F} = \{f, g\}$ y $\mathcal{P} = \{P\}$
(f unaria, g binaria, P binario)

$\mathcal{L}$-estructura $\mathcal{A}$

- $A = \mathbb{Z}$
- $c_{\mathcal{A}} = 0$
- $d_{\mathcal{A}} = 1$
- $f_{\mathcal{A}}(x) = -x$
- $g_{\mathcal{A}}(x, y) = x + y$
- $P_{\mathcal{A}}(x, y)$ sii x divide a y

Tenemos

- para $v(x) = 1$
  $\mathcal{A} \models P(x, d)[v]$
- para $v(x) = 0$
  $\mathcal{A} \not\models P(x, c)[v]$
- para cualquier v
  $\mathcal{A} \not\models (\forall y)P(y, g(y, d))[v]$

$\mathcal{L}$-estructura $\mathcal{B}$

- $B = \mathcal{P}(\mathbb{N})$
- $c_{\mathcal{B}} = \emptyset$
- $d_{\mathcal{B}} = \mathbb{N}$
- $f_{\mathcal{B}}(x) = \overline{x}$
- $g_{\mathcal{B}}(x, y) = x \cup y$
- $P_{\mathcal{B}}(x, y)$ sii $x \subseteq y$

Tenemos

- para $v(x) = \emptyset$
  $\mathcal{B} \models P(x, d)[v]$
- para $v(x) = \{1, 2, 3\}$
  $\mathcal{B} \not\models P(x, c)[v]$
- para cualquier v
  $\mathcal{B} \models (\forall y)P(y, g(y, d))[v]$

Notación ($\wedge$, $\vee$, $\exists$)

Sea $\mathcal{A}$ una $\mathcal{L}$-estructura y v una valuación de $\mathcal{A}$. Se deduce:

5. φ es de la forma $(\psi \vee \rho)$

$$\mathcal{A} \models (\psi \vee \rho)[v] \quad \textit{sii} \quad \mathcal{A} \models \psi[v] \quad \textit{o} \quad \mathcal{A} \models \rho[v]$$

6. φ es de la forma $(\psi \wedge \rho)$

$$\mathcal{A} \models (\psi \wedge \rho)[v] \quad \textit{sii} \quad \mathcal{A} \models \psi[v] \quad \textit{y} \quad \mathcal{A} \models \rho[v]$$

7. φ es de la forma $(\exists x)\psi$

$$\mathcal{A} \models (\exists x)\psi[v] \quad \textit{sii} \quad \text{hay un } a \in A \text{ tal que } \mathcal{A} \models \psi[v(x = a)]$$

3 niveles de verdad

Para un lenguaje $\mathcal{L}$ fijo.

1. φ es satisfacible si existe una $\mathcal{L}$-estructura $\mathcal{A}$ y una valuación v de $\mathcal{A}$ tal que $\mathcal{A} \models \varphi[v]$
2. φ es verdadera (o válida) en una $\mathcal{L}$-estructura $\mathcal{A}$ ($\mathcal{A} \models \varphi$) si $\mathcal{A} \models \varphi[v]$ para toda valuación v de $\mathcal{A}$
   - decimos que $\mathcal{A}$ es un modelo de φ
3. φ es universalmente válida ($\models \varphi$) si $\mathcal{A} \models \varphi[v]$ para toda $\mathcal{L}$-estructura $\mathcal{A}$ y toda valuación v de $\mathcal{A}$

Ejemplos

- $\mathcal{A} = \langle \mathbb{Z}; <, 0\rangle$ con la interpretación usual
  - $\mathcal{A} \models (\forall x)(\exists y)\ x < y$
  - $\mathcal{A} \models (\exists y)\ x < y$
  - $\mathcal{A} \not\models x < y \to (\exists z)\ (x < z \land z < y)$
  - $\mathcal{A} \models (\exists x)\ x < 0$
- $\mathcal{B} = \langle \mathbb{N}; <, 0\rangle$ con la interpretación usual
  - $\mathcal{B} \not\models x < y \to (\exists z)\ (x < z \land z < y)$
  - $\mathcal{B} \not\models (\exists x)\ x < 0$
- $\mathcal{C} = \langle \mathbb{Q}; <, 0\rangle$ con la interpretación usual
  - $\mathcal{C} \models x < y \to (\exists z)\ (x < z \land z < y)$
  - $\mathcal{C} \models (\exists x)\ x < 0$
- $(\exists x)(\forall y)\ P(x, y)$ es satisfacible
  - $\mathcal{D} = \langle \{0\}; =\rangle$ con la interpretación usual
  - $\mathcal{E} = \langle \mathbb{N}; \leq\rangle$ con la interpretación usual
- $\models (\forall x)\ P(x) \to P(x)$ se entiende $((\forall x)\ P(x)) \to P(x)$
- $\not\models P(x) \to (\forall x)\ P(x)$
  - $\mathcal{F} = \langle \mathbb{N}; \mathrm{par}\rangle$ con la interpretación usual, $v(x) = 0$

Algunos resultados sobre satisfacibilidad y validez

- si φ es una sentencia, $\mathcal{A} \models \varphi$ sii $\mathcal{A} \models \varphi[v]$
- φ es universalmente válida sii $\neg\varphi$ es insatisfacible
- preservación de validez del Modus Ponens:
  - $\mathcal{A} \models \varphi[v]$ y $\mathcal{A} \models (\varphi \to \psi)[v]$ entonces $\mathcal{A} \models \psi[v]$
  - $\mathcal{A} \models \varphi$ y $\mathcal{A} \models (\varphi \to \psi)$ entonces $\mathcal{A} \models \psi$
  - $\models \varphi$ y $\models (\varphi \to \psi)$ entonces $\models \psi$
- clausura universal
  - $\mathcal{A} \models \varphi$ sii $\mathcal{A} \models (\forall x)\varphi$
  - $\models \varphi$ sii $\models (\forall x)\varphi$

Consecuencia semántica

Sea $\Gamma \subseteq \mathrm{FORM}(\mathcal{L})$ y $\varphi \in \mathrm{FORM}(\mathcal{L})$

φ es consecuencia semántica de Γ ($\Gamma \models \varphi$) si para toda $\mathcal{L}$-estructura $\mathcal{A}$, toda valuación v de $\mathcal{A}$ tal que $\mathcal{A} \models \Gamma[v]$ cumple que $\mathcal{A} \models \varphi[v]$

Notación:

$$\mathcal{A} \models \Gamma[v]$$

significa que para toda $\psi \in \Gamma$,

$$\mathcal{A} \models \psi[v]$$

Ejemplos

$\mathcal{L} = \{P, Q\}$, con P y Q símbolos de predicado 1-arios

- $\Gamma_1 = \{ \quad (\forall x)(P(x) \to Q(x)) \quad \}$
  - $\Gamma_1 \not\models (\exists x)P(x)$
  - $\Gamma_1 \models (\exists x)P(x) \to (\exists x)Q(x)$
  - $\Gamma_1 \models (\forall x)P(x) \to (\forall x)Q(x)$
- $\Gamma_2 = \{ \quad (\forall x)(P(x) \to Q(x)) \quad , \quad (\exists x)P(x) \quad \}$
  - $\Gamma_2 \models (\exists x)Q(x)$
  - $\Gamma_2 \models (\exists x)(P(x) \wedge Q(x))$
  - $\Gamma_2 \not\models (\exists x)(\neg P(x) \wedge Q(x))$
- $\Gamma_3 = \{ \quad (\forall x)(P(x) \to Q(x)) \quad , \quad (\exists x)(P(x) \wedge \neg Q(x)) \quad \}$
  - $\Gamma_3 \models \varphi$ para cualquier φ

Lenguajes con igualdad

$\mathcal{L}$ es un lenguaje con igualdad si tiene un símbolo proposicional binario especial (el $=$) que sólo se interpreta como la igualdad.

Fijemos un lenguaje $\mathcal{L}$ con igualdad y con ningún otro símbolo. Buscamos $\varphi \in \text{FORM}(\mathcal{L})$ tal que $\{\mathcal{A} : \mathcal{A} \models \varphi\}$ sea la clase de modelos

- con exactamente 1 elemento

$$\varphi = (\exists x)(\forall y)x = y$$

- con exactamente 2 elementos

$$\varphi = (\exists x)(\exists y)\big(\overbrace{x \neq y}^{\neg x = y} \wedge (\forall z)(z = x \vee z = y)\big)$$

- con al menos 3 elementos

$$\varphi = (\exists x)(\exists y)(\exists z)\big(x \neq y \wedge x \neq z \wedge y \neq z\big)$$

Reemplazo de variables libres por términos

Sea $\mathcal{L} = \mathcal{C} \cup \mathcal{F} \cup \mathcal{P}$ un lenguaje fijo.

Sea $\varphi \in \text{FORM}(\mathcal{L})$, $t \in \text{TERM}(\mathcal{L})$ y $x \in \text{VAR}$. $\varphi[x/t]$ es la fórmula obtenida a partir de φ sustituyendo todas las apariciones libres de la variable x por t

Por ejemplo, (para un lenguaje con P símbolo de predicado binario y f símbolo de función unario)

- $P(x, y)[x/f(z)] = P(f(z), y)$
- $P(x, y)[x/f(x)] = P(f(x), y)$
- $((\forall x)(\forall y)\ P(x, y))[x/f(z)] = (\forall x)(\forall y)\ P(x, y)$
- $\big(P(x, y) \to (\forall x)(\forall y)\ P(x, y)\big)[x/f(z)] =$
  $P(f(z), y) \to (\forall x)(\forall y)\ P(x, y)$

Si $c \in \mathcal{C}$, $\varphi[c/t]$ es la fórmula obtenida a partir de φ sustituyendo todas las apariciones de la constante c por t

Variable reemplazable por un término

Sea $t \in \text{TERM}(\mathcal{L})$, $x \in \text{VAR}$, $\varphi \in \text{FORM}(\mathcal{L})$.

Decimos que x es reemplazable por t en φ cuando

1. t es un término cerrado (i.e. no tiene variables libres) o
2. t tiene variables libres pero ninguna de ellas queda atrapada por un cuantificador en el reemplazo $\varphi[x/t]$

Por ejemplo, (para un lenguaje con P símbolo de predicado unario y f símbolo de función binaria)
En

$$(\forall y)((\forall x)P(x) \to P(x))$$

- x es reemplazable por z: $\quad (\forall y)((\forall x)P(x) \to P(z))$
- x es reemplazable por $f(x, z)$: $\quad (\forall y)((\forall x)P(x) \to P(f(x, z)))$
- x no es reemplazable por $f(x, y)$: $\quad (\forall y)((\forall x)P(x) \to P(f(x, y)))$

Lema de Sustitución

Lema

Si x es reemplazable por t en φ entonces

$$\mathcal{A} \models (\varphi[x/t])[v] \quad \textit{sii} \quad \mathcal{A} \models \varphi[v(x = \tilde{v}(t))]$$

Demostración.

Por inducción en la complejidad de φ. □

Por ejemplo, para $\mathcal{N} = \langle \mathbb{N}; 0, < \rangle$ con la interpretación usual. Sea

$$\varphi = (\exists z)(x < z \wedge z < y)$$

Por lo tanto

$$\varphi[x/0] = (\exists z)(0 < z \wedge z < y)$$

Tenemos

$$\mathcal{N} \models (\varphi[x/0])[v] \quad \text{sii} \quad v(y) \geq 2$$
$$\mathcal{N} \models \varphi[v(x = 0)] \quad \text{sii} \quad v(y) \geq 2$$

Mecanismo deductivo *SQ*

Para un lenguaje fijo $\mathcal{L}$

- axiomas. Sean $\varphi, \psi, \rho \in \text{FORM}(\mathcal{L})$, $x \in \text{VAR}$, $t \in \text{TERM}(\mathcal{L})$
  - SQ1 $\varphi \to (\psi \to \varphi)$
  - SQ2 $(\varphi \to (\psi \to \rho)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \rho))$
  - SQ3 $(\neg\varphi \to \neg\psi) \to (\psi \to \varphi)$
  - SQ4 $(\forall x)\varphi \to \varphi[x/t]$ si x es reemplazable por t en φ
  - SQ5 $\varphi \to (\forall x)\varphi$ si x no aparece libre en φ
  - SQ6 $(\forall x)(\varphi \to \psi) \to ((\forall x)\varphi \to (\forall x)\psi)$
  - SQ7 si φ es un axioma entonces $(\forall x)\varphi$ también es un axioma
- regla de inferencia
  - MP Sean $\varphi, \psi \in \text{FORM}(\mathcal{L})$. ψ es una consecuencia inmediata de $\varphi \to \psi$ y φ

Consecuencia semántica, demostraciones, teoremas, teorías

Fijamos un lenguaje $\mathcal{L}$. Sea $\Gamma \subseteq \text{FORM}(\mathcal{L})$ y $\varphi \in \text{FORM}(\mathcal{L})$

1. una demostración en *SQ* es una cadena finita y no vacía

   $$\varphi_1, \dots, \varphi_n$$

   de fórmulas de $\mathcal{L}$ tal que $\varphi_n = \varphi$ y
   - φ_i es un axioma o
   - φ_i es una consecuencia inmediata de φ_k, φ_l, $k, l < i$

   En este caso, decimos que φ es un teorema ($\vdash \varphi$).
2. φ es una consecuencia sintáctica de Γ ($\Gamma \vdash \varphi$) si existe una cadena finita y no vacía

   $$\varphi_1, \dots, \varphi_n$$

   de fórmulas de $\mathcal{L}$ tal que $\varphi_n = \varphi$ y
   - φ_i es un axioma o
   - $\varphi_i \in \Gamma$ o
   - φ_i es una consecuencia inmediata de φ_k, φ_l, $k, l < i$

   Aquí, $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ se llama derivación de φ a partir de Γ. Γ se llama teoría. Decimos que φ es un teorema de la teoría Γ.

Ejemplo $\Gamma = \{(\forall x)(\varphi[z/x])\} \vdash (\forall z)\varphi$ (x no aparece libre en φ)

1.	$(\forall z)((\forall x)(\varphi[z/x]) \to \varphi)$	SQ4+SQ7
2.	$(\forall z)((\forall x)(\varphi[z/x]) \to \varphi) \to ((\forall z)(\forall x)(\varphi[z/x]) \to (\forall z)\varphi)$	SQ6
3.	$(\forall z)(\forall x)(\varphi[z/x]) \to (\forall z)\varphi$	MP 1,2
4.	$(\forall x)(\varphi[z/x]) \to (\forall z)(\forall x)(\varphi[z/x])$	SQ5
5.	$(\forall x)(\varphi[z/x])$	Γ
6.	$(\forall z)(\forall x)(\varphi[z/x])$	MP 4,5
7.	$(\forall z)\varphi$	MP 3,6

Observar

- paso 1: x es reemplazable por z en $\varphi[z/x]$
- paso 1: $\varphi[z/x][x/z] = \varphi$
- paso 4: z no aparece libre en $(\forall x)(\varphi[z/x])$

Correctitud y consistencia

Teorema (Correctitud)
El sistema SQ es correcto, i.e. si $\Gamma \vdash \varphi$ *entonces* $\Gamma \models \varphi$.

Teorema (Consistencia)
El sistema SQ es consistente, i.e. no existe $\varphi \in \mathrm{FORM}(\mathcal{L})$ *tal que*

$$\vdash \varphi \qquad y \qquad \vdash \neg\varphi$$

Resultados similares a los de *SP*

Teorema (de la Deducción)
Si $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \psi$ *entonces* $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$

$\Gamma \subseteq \mathrm{FORM}(\mathcal{L})$ es consistente si no existe $\varphi \in \mathrm{FORM}(\mathcal{L})$ tal que

$$\Gamma \vdash \varphi \qquad \text{y} \qquad \Gamma \vdash \neg\varphi$$

Proposición

1. $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ *es inconsistente sii* $\Gamma \vdash \varphi$
2. $\Gamma \cup \{\varphi\}$ *es inconsistente sii* $\Gamma \vdash \neg\varphi$

Teorema
Si Γ *es satisfacible, entonces* Γ *es consistente.*

Teorema
Si Γ *es inconsistente, entonces existe un subconjunto finito de* Γ *que es inconsistente.*

Instancias de esquemas tautológicos

- sea $\varphi(p_1, \dots, p_n)$ una tautología de P con variables proposicionales $p_1, \dots, p_n$.
- sean $\psi_1, \dots, \psi_n$ fórmulas cualesquiera de primer orden
- $\varphi(\psi_1, \dots, \psi_n)$ es una instancia de un esquema tautológico (reemplazar p_i por ψ_i en la fórmula original φ)

Proposición
Si φ *es una instancia de un esquema tautológico entonces* $\vdash \varphi$.

Por ejemplo, la fórmula de P

$$(p \land q) \to p$$

es tautología. Entonces

$$\vdash ((\forall x)R(x) \land (\exists y)Q(y)) \to (\forall x)R(x)$$

Variantes alfabéticas

Sea $\mathcal{L} = \{0, S\}$ con igualdad y $\varphi \in \mathrm{FORM}(\mathcal{L})$ definida como

$$\varphi = x \neq 0 \to (\exists y)x = S(y)$$

En φ la variable x es reemplazable por z:

$$\varphi[x/z] = z \neq 0 \to (\exists y)z = S(y)$$

Sin embargo, la variable x no es reemplazable por y:

$$\varphi[x/y] = y \neq 0 \to (\exists y)y = S(y)$$

No habría habido problemas si la fórmula original hubiese sido

$$\varphi' = x \neq 0 \to (\exists w)x = S(w)$$

φ' se llama variante alfabética de φ

Lema
Sea $\varphi \in \mathrm{FORM}(\mathcal{L})$. *Dados* $x \in \mathrm{VAR}$ *y* $t \in \mathrm{TERM}(\mathcal{L})$ *podemos encontrar* φ' *(variante alfabética de* φ*) tal que*

- $\{\varphi\} \vdash \varphi'$ *y* $\{\varphi'\} \vdash \varphi$
- x *es reemplazable por* t *en* φ'

Teorema de Generalización (TG)

Teorema

Si $\Gamma \vdash \varphi$ y x no aparece libre en ninguna fórmula de Γ, entonces $\Gamma \vdash (\forall x)\varphi$

Observar que es necesario pedir que x no aparezca libre en ninguna fórmula de Γ:

- $\{P(x)\} \not\models (\forall x)P(x)$
- entonces $\{P(x)\} \nvdash (\forall x)P(x)$ (por correctitud)

Demostración del teorema.

Planteo

$P(n)$ = para toda ψ, Γ y x tal que $\Gamma \vdash \psi$ y x no aparece libre en ninguna fórmula de Γ, si $\psi_1, \dots, \psi_n$ es una derivación de ψ a partir de Γ entonces $\Gamma \vdash (\forall x)\psi$

Demostración por inducción en n (detalles a continuación). □

Demostración del TG (caso base)

$P(n)$ = para toda ψ, Γ y x tal que $\Gamma \vdash \psi$ y x no aparece libre en ninguna fórmula de Γ, si $\psi_1, \dots, \psi_n$ es una derivación de ψ a partir de Γ entonces $\Gamma \vdash (\forall x)\psi$

Probamos $P(1)$:

- sea φ, Γ y x tal que x no aparece libre en Γ
- sea φ una derivación de φ a partir de Γ
- queremos ver que $\Gamma \vdash (\forall x)\varphi$

Hay 2 posibilidades:

1. φ es axioma de SQ $\overset{SQ7}{\Rightarrow}$ $\vdash (\forall x)\varphi$ $\Rightarrow$ $\Gamma \vdash (\forall x)\varphi$
2. $\varphi \in \Gamma$ entonces
   - $\Gamma \vdash \varphi$
   - por hipótesis x no aparece libre en φ
   - por SQ5, $\vdash \varphi \to (\forall x)\varphi$
   - por MP, $\Gamma \vdash (\forall x)\varphi$

Demostración del TG (paso inductivo)

$P(n)$ = para toda ψ, Γ y x tal que $\Gamma \vdash \psi$ y x no aparece libre en ninguna fórmula de Γ, si $\psi_1, \dots, \psi_n$ es una derivación de ψ a partir de Γ entonces $\Gamma \vdash (\forall x)\psi$

Probamos $P(n)$:

- sea φ, Γ y x tal que x no aparece libre en Γ
- sea $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ una derivación de φ a partir de Γ
- queremos ver que $\Gamma \vdash (\forall x)\varphi$
- HI: vale $P(m)$ para todo $m < n$

Hay 3 posibilidades:

1 y 2. φ es axioma de SQ o $\varphi \in \Gamma$: igual que en caso base.

3. φ se obtiene por MP de φ_i y φ_j ($i, j < n$): supongamos que $\varphi_j = \varphi_i \to \varphi$. Usamos HI 2 veces:
   - como $i < n$, vale $P(i)$, en particular, $\Gamma \vdash (\forall x)\varphi_i$
   - como $j < n$, vale $P(j)$, en particular, $\Gamma \vdash (\forall x)(\varphi_i \to \varphi)$

   por SQ6, $\vdash (\forall x)(\varphi_i \to \varphi) \to ((\forall x)\varphi_i \to (\forall x)\varphi)$
   usando MP 2 veces, $\Gamma \vdash (\forall x)\varphi$

Teorema de Generalización en Constantes (TGC)

Teorema

Supongamos que $\Gamma \vdash \varphi$ y c es un símbolo de constante que no aparece en Γ. Entonces existe una variable x que no aparece libre en φ tal que $\Gamma \vdash (\forall x)(\varphi[c/x])$. Más aun, hay una derivación de $(\forall x)(\varphi[c/x])$ a partir de Γ en donde c no aparece.

Idea de la demostración.

Sea $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ una derivación de φ a partir de Γ.
Sea x la primera variable que no aparece libre en ninguna de las φ_i.

1. demostrar que $\varphi_1[c/x], \dots, \varphi_n[c/x]$
   1.1 es una derivación de $\varphi[c/x]$ a partir de Γ (por inducción en n)
   1.2 no contiene al símbolo de constante c
2. hay un $\Delta \subseteq \Gamma$ finito tal que $\Delta \vdash \varphi[c/x]$ con derivación que no usa c y tal que x no aparece libre en ninguna fórmula de Δ
   2.1 Δ el conjunto de axiomas de Γ que se usan en $\varphi_1, \dots, \varphi_n$
3. por el TG, $\Delta \vdash (\forall x)(\varphi[c/x])$ con derivación que no usa c □

Consecuencias del TGC

Corolario

Supongamos que $\Gamma \vdash \varphi[z/c]$ y c es un símbolo de constante que no aparece en Γ ni en φ. Entonces $\Gamma \vdash (\forall z)\varphi$. Más aun, hay una derivación de $(\forall z)\varphi$ a partir de Γ en donde c no aparece.

Demostración.

- por el TGC, existe x tal que
  - x no aparece libre en $\varphi[z/c]$
  - $\Gamma \vdash (\forall x)(\varphi[z/c][c/x])$
  - en esta última derivación no aparece c
- como c no aparece en φ, $\quad \varphi[z/c][c/x] = \varphi[z/x]$
- entonces $\quad \Gamma \vdash (\forall x)(\varphi[z/x])$
- sabemos $\quad \vdash (\forall x)(\varphi[z/x]) \to (\forall z)\varphi$
  (aplicar el Teorema de la Deducción a derivación de hoja 64)
- por MP concluimos $\Gamma \vdash (\forall z)\varphi$
- en esta última derivación no aparece c

$\square$

Lenguajes con igualdad

Fijamos un lenguaje $\mathcal{L}$ con igualdad.
Para los lenguajes con igualdad, se considera el sistema $SQ^=$ con los axiomas y regla de inferencia de SQ, sumando estos dos axiomas

- axiomas adicionales para $SQ^=$. Sean $\varphi, \psi \in \text{FORM}(\mathcal{L})$, $x, y \in \text{VAR}$

  $SQ^=1$ $\quad x = x$

  $SQ^=2$ $\quad x = y \to (\varphi \to \psi)$ donde φ es atómica y ψ se obtiene de φ reemplazando x por y en cero o más lugares

Se puede probar que

- $SQ^=$ es consistente
- Si hay una derivación de φ en $SQ^=$ entonces φ es verdadera en toda $\mathcal{L}$-estructura en donde el $=$ se interpreta como la igualdad

Notas sobre computabilidad

Fijemos un lenguaje numerable $\mathcal{L}$. Se pueden codificar las fórmulas de $\text{FORM}(\mathcal{L})$ con números naturales.
El conjunto $\{\varphi : \varphi \text{ es un axioma de } SQ\}$ es computable.

Se pueden codificar las demostraciones de SQ con listas.
El conjunto $D = \{d : d \text{ es una demostración en } SQ\}$ es computable.

Entonces

- considerar el siguiente programa P:

$$
\begin{array}{ll}
[A] & \text{IF } T \in D \wedge T[|T|] = X \text{ GOTO } E \\
 & T \leftarrow T + 1 \\
 & \text{GOTO } A
\end{array}
$$

- conjunto de teoremas de $SQ = \{\varphi : \Psi_P(\varphi)\downarrow\}$
- el conjunto de teoremas del sistema SQ es r.e.

¿El conjunto de teoremas de SQ es computable?

Consistente $\Rightarrow$ satisfacible

Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje fijo. Sea $\Gamma \subseteq \text{FORM}(\mathcal{L})$ consistente. Queremos construir un modelo canónico $\mathcal{B}$ y una valuación v de $\mathcal{B}$ tal que:

$$\mathcal{B} \models \varphi[v] \text{ para toda } \varphi \in \Gamma$$

Demostración en 5 pasos:

Paso 1. expandir $\mathcal{L}$ a $\mathcal{L}'$ con nuevas constantes. $\mathcal{L}' = \mathcal{L} \cup \mathcal{C}$. En $\mathcal{C}$ hay una cantidad infinita numerable de nuevas constantes ("nuevas" porque no aparecen en $\mathcal{L}$)

Paso 2. agregar testigos a Γ. Trabajamos con $\Gamma \cup \Theta$, donde Θ es un conjunto de formulas especiales que usan las constantes nuevas de $\mathcal{L}'$

Paso 3. aplicar el Lema de Lindenbaum para $\Gamma \cup \Theta$. Obtener $\Delta \supseteq \Gamma \cup \Theta$ maximal consistente

Paso 4. construir el modelo canónico $\mathcal{A}$ y valuación v (para el lenguaje $\mathcal{L}'$) tal que $\mathcal{A} \models \varphi[v]$ sii $\varphi \in \Delta$

Paso 5. restringir $\mathcal{A}$ y v al lenguaje original $\mathcal{L}$ y obtener $\mathcal{B}$

Paso 1: expandir de $\mathcal{L}$ a $\mathcal{L}'$ con nuevas constantes

Teorema
Sea $\Gamma \subseteq \mathrm{FORM}(\mathcal{L})$ consistente. Sea $\mathcal{C}$ un conjunto de nuevas constantes que no aparecen en $\mathcal{L}$. Si $\mathcal{L}' = \mathcal{L} \cup \mathcal{C}$ entonces Γ es consistente en el lenguaje $\mathcal{L}'$.

Demostración.
- supongamos Γ inconsistente en el nuevo lenguaje $\mathcal{L}'$. Entonces existe $\varphi \in \mathrm{FORM}(\mathcal{L}')$ tal que $\quad \Gamma \vdash \varphi \quad$ y $\quad \Gamma \vdash \neg\varphi$
- cada una de estas derivaciones usa fórmulas en $\mathrm{FORM}(\mathcal{L}')$, pero aparecen solo finitas constantes nuevas
- por el TGC, cada constante nueva utilizada (por hipótesis no aparece en Γ) puede reemplazarse por una variable nueva
- obtenemos una derivación de

  $\Gamma \vdash \varphi[c_1, \ldots, c_n/x_1, \ldots, x_n]$ y $\Gamma \vdash \neg\varphi[d_1, \ldots, d_m/y_1, \ldots, y_m]$

  en el lenguaje original $\mathcal{L}$ (d_i y c_i son nuevas constantes; x_i, y_i son nuevas variables)
- entonces Γ es inconsistente en el lenguaje $\mathcal{L}$

$\square$

Paso 2: agregar testigos a $\mathcal{L}'$

Sea Γ y $\mathcal{C}$ como en el paso 1. Sea

$$\langle \varphi_1, x_1 \rangle, \langle \varphi_2, x_2 \rangle, \ldots$$

una enumeración de $\mathrm{FORM}(\mathcal{L}') \times \mathrm{VAR}$
Definimos

$$\theta_n = \neg(\forall x_n)\varphi_n \to \neg(\varphi_n[x_n/c_n])$$

donde c_n es la primera constante de $\mathcal{C}$ que
- no aparece en φ_n y
- no aparece en $\theta_1, \ldots, \theta_{n-1}$

Definimos

$$\Theta = \{\theta_1, \theta_2, \ldots\}$$

Teorema
$\Gamma \cup \Theta \subseteq \mathrm{FORM}(\mathcal{L}')$ es consistente.

Observar que Θ agrega testigos a Γ. Si ocurre $\neg(\forall x)\varphi$ entonces hay una constante c que atestigua que φ no vale para todo x, i.e. $\neg(\varphi[x/c])$

Demostración del paso 2

Supongamos Γ consistente. Recordemos que $\Theta = \{\theta_1, \theta_2, \ldots\}$
- supongamos $\Gamma \cup \Theta$ inconsistente
- debe existir i tal que $\Gamma \cup \{\theta_1, \ldots, \theta_{i+1}\}$ es inconsistente
- sea n el mínimo tal i y sea $\Theta' = \{\theta_1, \ldots, \theta_{n+1}\}$
- observar que $\{\theta_1, \ldots, \theta_n\}$ es consistente
- $\Gamma \cup \{\theta_1, \ldots, \theta_n\} \vdash \neg \underbrace{(\neg(\forall x)\varphi \to \neg(\varphi[x/c]))}_{\theta_{n+1}}$

  donde c no aparece en $\{\theta_1, \ldots, \theta_n\}$ ni en φ
- las siguientes son instancias de esquemas tautológicos:
  - $\neg\theta_{n+1} \to \neg(\forall x)\varphi$
  - $\neg\theta_{n+1} \to (\varphi[x/c])$
- por lo tanto
  - $\vdash \neg\theta_{n+1} \to \neg(\forall x)\varphi \overset{\mathrm{MP}}{\Rightarrow} \Gamma \cup \{\theta_1, \ldots, \theta_n\} \vdash \neg(\forall x)\varphi$
  - $\vdash \neg\theta_{n+1} \to (\varphi[x/c]) \overset{\mathrm{MP}}{\Rightarrow} \Gamma \cup \{\theta_1, \ldots, \theta_n\} \vdash \varphi[x/c]$
- por el corolario del TGC, $\quad \Gamma \cup \{\theta_1, \ldots, \theta_n\} \vdash (\forall x)\varphi$

  (notar que c no aparece en $\Gamma \cup \{\theta_1, \ldots, \theta_n\}$ ni en φ)
- entonces $\Gamma \cup \{\theta_1, \ldots, \theta_n\}$ es inconsistente

Paso 3: Lema de Lindenbaum para $\Gamma \cup \Theta$

Teorema
Sea Γ y Θ como en los pasos 1 y 2. Existe un conjunto $\Delta \supseteq \Gamma \cup \Theta$ tal que Δ es maximal consistente.

Demostración.
Igual que para el caso proposicional. $\square$

Como en el caso proposicional, para toda $\varphi \in \mathrm{FORM}(\mathcal{L}')$
- $\varphi \in \Delta$ o bien $\neg\varphi \in \Delta$
- $\varphi \in \Delta$ sii $\Delta \vdash \varphi$

Paso 4: construcción del modelo canónico $\mathcal{A}$

Definimos el modelo canónico $\mathcal{A}$:

- $A = \mathrm{TERM}(\mathcal{L}')$
- para cada símbolo de función n-aria f,

$$f_{\mathcal{A}}(\underbrace{t_1, \ldots, t_n}_{\in A^n}) = f(t_1, \ldots, t_n) \in A$$

- para cada símbolo de constante c,

$$c_{\mathcal{A}} = c \in A$$

- para cada símbolo de predicado n-ario P,

$$\underbrace{(t_1, \ldots, t_n)}_{\in A^n} \in P_{\mathcal{A}} \quad \text{sii} \quad P(t_1, \ldots, t_n) \in \Delta$$

Paso 4: definición de la valuación v

Definimos la valuación $v : \mathrm{VAR} \to \underbrace{\mathrm{TERM}(\mathcal{L}')}_{A}$ como

$$v(x) = x$$

Lema
Para todo $t \in \mathrm{TERM}(\mathcal{L}')$, $\tilde{v}(t) = t$.

Demostración.
Por inducción en la complejidad de t (fácil). □

Teorema
Para toda $\varphi \in \mathrm{FORM}(\mathcal{L}')$, $\mathcal{A} \models \varphi[v]$ *sii* $\varphi \in \Delta$.

Demostración.
Por inducción en la complejidad de φ (detalles a continuación). □

Paso 4: $\mathcal{A} \models \varphi[v]$ sii $\varphi \in \Delta$ (caso base)

Si φ es una fórmula atómica $P(t_1, \ldots, t_n)$:

$$\begin{array}{llll} \mathcal{A} \models P(t_1, \ldots, t_n)[v] & \text{sii} & (\tilde{v}(t_1), \ldots, \tilde{v}(t_n)) \in P_{\mathcal{A}} & \\ & \text{sii} & (t_1, \ldots, t_n) \in P_{\mathcal{A}} & \text{pues } \tilde{v}(t) = t \\ & \text{sii} & P(t_1, \ldots, t_n) \in \Delta & \text{por def. de } \mathcal{A} \end{array}$$

Paso 4: $\mathcal{A} \models \varphi[v]$ sii $\varphi \in \Delta$ (paso inductivo; $\varphi = \neg\psi$)

$$\begin{array}{llll} \mathcal{A} \models \varphi[v] & \text{sii} & \mathcal{A} \not\models \psi[v] & \\ & \text{sii} & \psi \notin \Delta & \text{por HI} \\ & \text{sii} & \neg\psi \in \Delta & \text{por propiedad de } \Delta \end{array}$$

Paso 4: $\mathcal{A} \models \varphi[v]$ sii $\varphi \in \Delta$ (paso inductivo; $\varphi = \psi \to \rho$)

$$
\begin{array}{llll}
\mathcal{A} \models \varphi[v] & \text{sii} & \mathcal{A} \not\models \psi[v] \text{ o } \mathcal{A} \models \rho[v] & \\
& \text{sii} & \psi \notin \Delta \text{ o } \rho \in \Delta & \text{por HI} \\
& \text{sii} & \neg\psi \in \Delta \text{ o } \rho \in \Delta & \text{por propiedad de } \Delta \\
& \Rightarrow & \Delta \vdash \psi \to \rho & \text{(ejercicio)} \\
& \Rightarrow & \psi \to \rho \in \Delta & \text{por propiedad de } \Delta
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{llll}
\varphi \in \Delta & \Rightarrow & \psi \notin \Delta \text{ o } (\psi \in \Delta \text{ y } \Delta \vdash \rho) & \text{MP en 2do caso} \\
& \Rightarrow & \psi \notin \Delta \text{ o } (\psi \in \Delta \text{ y } \rho \in \Delta) & \text{por propiedad de } \Delta \\
& \Rightarrow & \psi \notin \Delta \text{ o } \rho \in \Delta & \\
& \text{sii} & \mathcal{A} \not\models \psi[v] \text{ o } \mathcal{A} \models \rho[v] & \text{por HI} \\
& \text{sii} & \mathcal{A} \models \psi \to \rho[v] &
\end{array}
$$

Paso 4: $\mathcal{A} \models \varphi[v]$ sii $\varphi \in \Delta$ (paso inductivo ($\Rightarrow$) ; $\varphi = (\forall x)\psi$)

- supongamos $\mathcal{A} \models (\forall x)\psi[v]$
- para todo $t \in A$, $\mathcal{A} \models \psi[v(x = t)]$
- supongamos $\neg(\forall x)\psi \to \neg(\psi[x/c]) \in \Theta$
- en particular, $\mathcal{A} \models \psi[v(x = c)]$
- por definición de v, $\mathcal{A} \models \psi[v(x = \tilde{v}(c))]$
- por el Lema de Sustitución, $\mathcal{A} \models (\psi[x/c])[v]$
- por HI, $\psi[x/c] \in \Delta$
- por propiedad de Δ, $\neg(\psi[x/c]) \notin \Delta$
- veamos que $\neg(\forall x)\psi \notin \Delta$:
  - supongamos que $\neg(\forall x)\psi \in \Delta$
  - $\Delta \vdash \neg(\forall x)\psi$
  - como $\Delta \supseteq \Theta$, $\neg(\forall x)\psi \to \neg(\psi[x/c]) \in \Delta$
  - $\Delta \vdash \neg(\forall x)\psi \to \neg(\psi[x/c])$
  - por MP tenemos $\Delta \vdash \neg(\psi[x/c])$
  - por propiedad de Δ, $\neg(\psi[x/c]) \in \Delta$
- concluimos $(\forall x)\psi \in \Delta$

Paso 4: $\mathcal{A} \models \varphi[v]$ sii $\varphi \in \Delta$ (paso inductivo ($\Leftarrow$) ; $\varphi = (\forall x)\psi$)

- supongamos $\mathcal{A} \not\models \varphi[v]$
- existe $t \in A$, $\mathcal{A} \not\models \psi[v(x = t)]$
- sea ψ' una variante alfabética de ψ tal que x sea reemplazable por t en ψ')
- $\mathcal{A} \not\models \psi'[v(x = t)]$
- como $\tilde{v}(t) = t$, $\mathcal{A} \not\models \psi'[v(x = \tilde{v}(t))]$
- por el Lema de Sustitución $\mathcal{A} \not\models (\psi'[x/t])[v]$
- por HI, $\psi'[x/t] \notin \Delta$
- veamos que $(\forall x)\psi \notin \Delta$:
  - supongamos que $(\forall x)\psi' \in \Delta$
  - $\Delta \vdash (\forall x)\psi'$
  - sabemos $\vdash (\forall x)\psi' \to \psi'[x/t]$ por SQ4
  - por MP concluimos $\Delta \vdash \psi'[x/t]$
  - por propiedad de Δ, $\psi'[x/t] \in \Delta$
- por equivalencia de variantes alfabéticas, $(\forall x)\psi \notin \Delta$

Paso 5: restringir $\mathcal{A}$ y v al lenguaje original $\mathcal{L}$

Volvemos al lenguaje original $\mathcal{L}$.

Definimos $\mathcal{B}$ como la restricción de $\mathcal{A}$ a $\mathcal{L}$

Del paso 4 sabemos que para toda $\varphi \in \text{FORM}(\mathcal{L}')$,

$$\mathcal{A} \models \varphi[v] \text{ sii } \varphi \in \Delta.$$

Obviamente, si $\varphi \in \Gamma \subseteq \text{FORM}(\mathcal{L})$ tenemos

$$\mathcal{A} \models \varphi[v] \quad \text{sii} \quad \mathcal{B} \models \varphi[v]$$

Luego, para Γ consistente, encontramos una $\mathcal{L}$-estructura $\mathcal{B}$ tal que

$$\mathcal{B} \models \varphi[v] \text{ para toda } \varphi \in \Gamma$$

Concluimos que Γ es satisfacible.

Teorema de Löwenheim-Skolem

Corolario
Γ es consistente sii Γ es satisfacible

Teorema (sin igualdad)
Sea $\mathcal{L}$ numerable y sin igualdad. Si $\Gamma \subseteq \mathrm{FORM}(\mathcal{L})$ es satisfacible, es satisfacible en un modelo infinito numerable.

Demostración.
Es lo que acabamos de ver. Si $\mathcal{L}$ es numerable, $A = \mathrm{FORM}(\mathcal{L})$ es numerable. □

Teorema (con igualdad)
Sea $\mathcal{L}$ numerable y con igualdad. Si $\Gamma \subseteq \mathrm{FORM}(\mathcal{L})$ es satisfacible, es satisfacible en un modelo finito o infinito numerable.

Se puede probar algo más fuerte

Teorema (ascendente)
Si $\mathcal{L}$ es numerable y $\Gamma \subseteq \mathrm{FORM}(\mathcal{L})$ tiene modelo infinito, tiene modelo de cualquier cardinalidad.

Completitud y Compacidad

Teorema (Completitud fuerte, Gödel)
Si $\Gamma \models \varphi$ entonces $\Gamma \vdash \varphi$.

Demostración.
Igual que para proposicional □

Corolario
$\Gamma \models \varphi$ sii $\Gamma \vdash \varphi$.

Teorema (Compacidad)
Sea $\Gamma \subseteq \mathrm{FORM}(\mathcal{L})$. Si todo Δ finito, $\Delta \subseteq \Gamma$ es satisfacible, entonces Γ es satisfacible.

Demostración.
Igual que para proposicional □

Aplicaciones - no expresividad de primer orden

Teorema
Si Γ tiene modelos arbitrariamente grandes, tiene modelo infinito.

Demostración.
Definimos (en el lenguaje con solo la igualdad)

$$\begin{aligned} \varphi_2 &= (\exists x)(\exists y) x \neq y \\ \varphi_3 &= (\exists x)(\exists y)(\exists z)(x \neq y \wedge x \neq z \wedge y \neq z) \\ &\vdots \\ \varphi_n &= \text{hay al menos } n \text{ elementos} \end{aligned}$$

- por hipótesis, todo subconjunto finito de $\Gamma \cup \{\varphi_2, \varphi_3, \dots\}$ tiene modelo
- por Compacidad, $\Gamma \cup \{\varphi_2, \varphi_3, \dots\}$ tiene algún modelo $\mathcal{M}$
- $\mathcal{M}$ tiene que ser infinito □

Conclusión:

- $\mathcal{A}$ es infinito sii $\mathcal{A} \models \{\varphi_2, \varphi_3, \dots\}$
- no existe Γ tal que $\mathcal{A}$ es finito sii $\mathcal{A} \models \Gamma$

Aplicaciones - modelos no estándar

Consideremos un lenguaje $\mathcal{L} = \{0, S, <, +, \cdot\}$ con igualdad. Consideremos la estructura $\mathcal{N} = \langle \mathbb{N}; 0, S, <, +, \cdot \rangle$ con la interpretación usual. Sea

$$\mathrm{Th}(\mathcal{N}) = \{\varphi : \varphi \text{ es sentencia y } \mathcal{N} \models \varphi\}$$

Expandimos el lenguaje con una nueva constante c y definimos

$$\Gamma = \{0 < c, S(0) < c, S(S(0)) < c, S(S(S(0))) < c, \dots\}$$

- cada subconjunto finito de $\Gamma \cup \mathrm{Th}(\mathcal{N})$ tiene modelo
- por Compacidad, $\Gamma \cup \mathrm{Th}(\mathcal{N})$ tiene modelo
- por Löwenheim-Skolem $\Gamma \cup \mathrm{Th}(\mathcal{N})$ un modelo numerable
$$\mathcal{M} = \langle M; 0^{\mathcal{M}}, S^{\mathcal{M}}, <^{\mathcal{M}}, +^{\mathcal{M}}, \cdot^{\mathcal{M}}, c^{\mathcal{M}} \rangle$$
- sea $\mathcal{M}'$ la restricción de $\mathcal{M}$ al lenguaje original $\mathcal{L}$
- $\mathcal{N} \models \varphi$ sii $\mathcal{M}' \models \varphi$ para toda sentencia $\varphi \in \mathrm{FORM}(\mathcal{L})$
  - $\mathcal{N} \models \varphi \quad \Rightarrow \quad \varphi \in \mathrm{Th}(\mathcal{N}) \quad \Rightarrow \quad \mathcal{M} \models \varphi \quad \Rightarrow \quad \mathcal{M}' \models \varphi$
  - $\mathcal{N} \not\models \varphi \quad \Rightarrow \quad \mathcal{N} \models \neg\varphi \quad \Rightarrow \quad \neg\varphi \in \mathrm{Th}(\mathcal{N}) \quad \Rightarrow \quad \mathcal{M} \models \neg\varphi \quad \Rightarrow \quad \mathcal{M}' \models \neg\varphi \quad \Rightarrow \quad \mathcal{M}' \not\models \varphi$
- $\mathcal{N}$ y $\mathcal{M}'$ no son isomorfos: $c^{\mathcal{M}}$ es inalcanzable en $\mathcal{M}'$

Propiedades de conjuntos satisfacibles para proposicional

Proposición

Sea $\Gamma \subseteq \mathrm{FORM}$ satisfacible.

- $R_\neg$ *si* $\neg\neg\varphi \in \Gamma$ *entonces* $\Gamma \cup \{\varphi\}$ *es satisfacible*
- $R_\vee$ *si* $\varphi \vee \psi \in \Gamma$ *entonces* $\Gamma \cup \{\varphi\}$ *o* $\Gamma \cup \{\psi\}$ *es satisfacible*
- $R_\wedge$ *si* $\varphi \wedge \psi \in \Gamma$ *entonces* $\Gamma \cup \{\varphi\}$ *y* $\Gamma \cup \{\psi\}$ *es satisfacible*
- $R_\rightarrow$ *si* $\varphi \rightarrow \psi \in \Gamma$ *entonces* $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ *o* $\Gamma \cup \{\psi\}$ *es satisfacible*
- $R_{\neg\vee}$ *si* $\neg(\varphi \vee \psi) \in \Gamma$ *entonces* $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ *y* $\Gamma \cup \{\neg\psi\}$ *es satisfacible*
- $R_{\neg\wedge}$ *si* $\neg(\varphi \wedge \psi) \in \Gamma$ *entonces* $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ *o* $\Gamma \cup \{\neg\psi\}$ *es satisfacible*
- $R_{\neg\rightarrow}$ *si* $\neg(\varphi \rightarrow \psi) \in \Gamma$ *entonces* $\Gamma \cup \{\varphi\}$ *y* $\Gamma \cup \{\neg\psi\}$ *es satisfacible*

Reglas para proposicional

$R_\neg$: $\begin{array}{c} \neg\neg\varphi \\ \varphi \end{array}$

$R_\vee$: $\begin{array}{c} (\varphi \vee \psi) \\ \varphi \quad \psi \end{array}$ $\qquad$ $R_{\neg\vee}$: $\begin{array}{c} \neg(\varphi \vee \psi) \\ \neg\varphi \\ \neg\psi \end{array}$

$R_\wedge$: $\begin{array}{c} (\varphi \wedge \psi) \\ \varphi \\ \psi \end{array}$ $\qquad$ $R_{\neg\wedge}$: $\begin{array}{c} \neg(\varphi \wedge \psi) \\ \neg\varphi \quad \neg\psi \end{array}$

$R_\rightarrow$: $\begin{array}{c} (\varphi \rightarrow \psi) \\ \neg\varphi \quad \psi \end{array}$ $\qquad$ $R_{\neg\rightarrow}$: $\begin{array}{c} \neg(\varphi \rightarrow \psi) \\ \varphi \\ \neg\psi \end{array}$

Propiedades de conjuntos satisfacibles para primer orden

Proposición

Sea $\mathcal{L} = \mathcal{C} \cup \mathcal{F} \cup \mathcal{P}$, sea $\mathcal{C}'$ un conjunto numerable de nuevas constantes y sea $\Gamma \subseteq \mathrm{FORM}(\mathcal{L})$ satisfacible.

$R_\forall$ *si* $(\forall x)\varphi \in \Gamma$ *entonces es satisfacible el conjunto*

$$\Gamma \cup \{\varphi[x/t] : t \in \mathrm{TERM}(\mathcal{L}) \textit{ no tiene variables}\}$$

$R_\exists$ *si* $(\exists x)\varphi \in \Gamma$ *entonces es satisfacible el conjunto*

$$\Gamma \cup \{\varphi[x/c] : c \in \mathcal{C}' \textit{ no aparece en ninguna fórmula de } \Gamma\}$$

$R_{\neg\forall}$ *si* $\neg(\forall x)\varphi \in \Gamma$ *entonces es satisfacible el conjunto*

$$\Gamma \cup \{\neg\varphi[x/c] : c \in \mathcal{C}' \textit{ no aparece en ninguna fórmula de } \Gamma\}$$

$R_{\neg\exists}$ *si* $\neg(\exists x)\varphi \in \Gamma$ *entonces es satisfacible el conjunto*

$$\Gamma \cup \{\neg\varphi[x/t] : t \in \mathrm{TERM}(\mathcal{L}) \textit{ no tiene variables}\}$$

Reglas para primer orden

Sea $\mathcal{L} = \mathcal{C} \cup \mathcal{F} \cup \mathcal{P}$ y sea $\mathcal{C}'$ un conjunto numerable de nuevas constantes.

Son las mismas que para porposicional (donde $\varphi, \psi \in \mathrm{FORM}(\mathcal{L})$), más estas 4 adicionales:

$R_\forall$: $\begin{array}{l} (\forall x)\varphi \\ \varphi[x/t] \end{array}$ $\qquad$ si $t \in \mathrm{TERM}(\mathcal{L})$ no tiene variables

$R_\exists$: $\begin{array}{l} (\exists x)\varphi \\ \varphi[x/c] \end{array}$ $\qquad$ si $c \in \mathcal{C}'$ no fue usada antes

$R_{\neg\forall}$: $\begin{array}{l} \neg(\forall x)\varphi \\ \neg\varphi[x/c] \end{array}$ $\qquad$ si $c \in \mathcal{C}'$ no fue usada antes

$R_{\neg\exists}$: $\begin{array}{l} \neg(\exists x)\varphi \\ \neg\varphi[x/t] \end{array}$ $\qquad$ si $t \in \mathrm{TERM}(\mathcal{L})$ no tiene variables

Ejemplo: $\varphi = P(c) \to (\exists x)P(x)$

Supongamos $\mathcal{L}$ con P unario, c constante.

Pregunta: ¿φ es universalmente válida?

φ es universalmente válida sii $\neg\varphi$ es insatisfacible

$$\begin{array}{c} \neg(P(c) \to (\exists x)P(x)) \\ P(c) \\ \neg(\exists x)P(x) \\ \neg P(c) \\ \times \end{array}$$

Uso la regla

$$\mathrm{R}_{\neg\exists} \quad \begin{array}{l} \neg(\exists x)\varphi \\ \neg\varphi[x/t] \end{array} \qquad \text{si } t \in \mathrm{TERM}(\mathcal{L}) \text{ no tiene variables}$$

instanciando t en c

Respuesta: sí, φ es universalmente válida

Resultado principal

Teorema

Una sentencia φ es insatisfacible sii origina un árbol cerrado.

- es lo único que sabemos
- procedimiento de semi-decisión
- si φ origina un árbol cerrado, eventualmente lo encontramos (con un orden apropiado de reemplazos)
- prueba que el conjunto de fórmulas insatisfacibles es un conjunto r.e
  - ya lo sabíamos: φ es insatisfacible sii $\neg\varphi$ es teorema de SQ

Conjuntos saturados

Un conjunto $\Gamma \subseteq \mathrm{FORM}(\mathcal{L})$ de sentencias es saturado si

1. una fórmula y su negación no pueden estar simultáneamente en Γ
2. si una sentencia es de tipo $\neg\neg\varphi$, su conclusión (i.e. φ) está en Γ
3. si una sentencia es de tipo $(\varphi \wedge \psi)$, $\neg(\varphi \vee \psi)$, $\neg(\varphi \to \psi)$, sus dos conclusiones están en Γ
4. si una sentencia es de tipo $(\varphi \vee \psi)$, $\neg(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \to \psi)$, al menos una de sus conclusiones está en Γ
5. si una sentencia es de tipo $(\exists x)\varphi$, $\neg(\forall x)\varphi$ alguna de sus conclusiones está en Γ (para al menos una constante c)
6. si una sentencia es de tipo $(\forall x)\varphi$, $\neg(\exists x)\varphi$ todas sus conclusiones están en Γ (para todos los términos t sin variables)

Teorema

Todo conjunto de sentencias saturado es satisfacible.

Ejemplo: $\psi = (\exists x)(\forall y)R(x, y)$

Supongamos $\mathcal{L}$ con P unario R binario, c constante.

Pregunta: ¿ψ es satisfacible?

$$\begin{array}{c} (\exists x)(\forall y)R(x,y) \\ (\forall y)R(c_1,y) \\ R(c_1,t_1) \\ (\forall y)R(c_2,y) \\ R(c_2,t_2) \\ (\forall y)R(c_3,y) \\ R(c_3,t_3) \\ \vdots \end{array}$$

Respuesta: ¿?

$$\begin{array}{c} (\exists x)(\forall y)R(x,y) \\ (\forall y)R(c_1,y) \\ R(c_1,t_1) \\ R(c_1,t_2) \\ R(c_1,t_3) \\ R(c_1,t_4) \\ \vdots \end{array}$$

Respuesta: en el límite, la rama está saturada, de modo que ψ es satisfacible.

Notar que el algoritmo no termina.

Notas sobre computabilidad

Para un lenguaje numerable:

- el conjunto de teoremas de SQ es r.e. pero no es computable
- el conjunto fórmulas insatisfacibles es r.e. pero no es computable
- el conjunto de no-teoremas de SQ no es r.e.
- el conjunto de fórmulas satisfacibles no es r.e.
- el conjunto de fórmulas satisfacibles en modelos finitos es r.e.
- el conjunto de fórmulas satisfacibles en modelos infinitos no es r.e.