Lógica y Computabilidad

Verano 2007

Reducibilidad de Turing

Oráculos

El lenguaje $\mathscr{S}$ se extiende:

- tiene entradas $X_1, \ldots, X_n \in \mathbb{N}$ (como antes) y una entrada especial
$$V \subseteq \mathbb{N}$$
que se llama oráculo.
- una nueva instrucción
$$V[i] = \begin{cases} 1 & \text{si } i \in V \\ 0 & \text{sino} \end{cases}$$

Todo se puede aritmetizar como antes. Existe un programa universal:

$$\Phi_e^A(x_1, \ldots, x_n) = \begin{array}{l} \text{salida del } e\text{-ésimo programa} \\ \text{con entrada } x_1, \ldots, x_n \text{ y oráculo } A \end{array}$$

Tienen más poder de cómputo

Por ejemplo, hay un programa que calcula e halting problem

$$K = \{x : \Phi_x(x) \downarrow\}$$

Pero claro... con oráculo K.

Por ejemplo, hay un programa p tal que

- $\Phi_p^A = A$ para todo A
- $\Phi_p^A = \overline{A}$ para todo A
- $\Phi_p^K = \{x : \text{dom } \Phi_x = \emptyset\}$

Sin embargo, hay problemas que no se pueden resolver aun teniendo el oráculo K:

- $\{x : \Phi_x \text{ es total}\}$
- $\{x : \Phi_x^K(x) \downarrow\}$

Reducibilidad de Turing

Para $A, B \subseteq \mathbb{N}$, decimos que $A \leq_T B$ cuando se puede calcular el conjunto A con oráculo B, i.e. existe p tal que

$$\Phi_p^B = A$$

o sea para todo $x \in \mathbb{N}$

$$\Phi_p^B(x) = A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{sino} \end{cases}$$

- $A \leq_T A$ para todo A
- $\overline{A} \leq_T A$ para todo A
- $\{x : \text{dom } \Phi_x = \emptyset\} \leq_T K$
- $\{x : \Phi_x \text{ es total}\} \not\leq_T K$
- $\{x : \Phi_x^K(x) \downarrow\} \not\leq_T K$

El salto

Para $A \subseteq \mathbb{N}$ se define el salto de A como

$$A' = \{x : \Phi_x^A(x)\downarrow\}$$

Por ejemplo,

- $\emptyset' = \{x : \Phi_x^{\emptyset}(x)\downarrow\} = \{x : \Phi_x(x)\downarrow\} = K$
- $\emptyset'' = \{x : \Phi_x^{\emptyset'}(x)\downarrow\}$
- $\emptyset''' = \{x : \Phi_x^{\emptyset''}(x)\downarrow\}$

Decimos $A <_T B$ cuando $A \leq_T B$ y $B \not\leq_T A$.

En general, para cualquier $A \subseteq \mathbb{N}$

$$A <_T A' <_T A'' <_T A''' \dots$$

Problema de Post

Ejemplos de conjuntos r.e.

- $K = \{x : \Phi_x(x)\downarrow\} \equiv_T \emptyset'$
- $\emptyset \equiv_T \emptyset$
- $\{\langle x, y\rangle : \Phi_x(y)\downarrow\} \equiv_T \emptyset'$
- $\{x : x \text{ es primo}\} \equiv_T \emptyset$
- $\{\langle x, \langle y, z\rangle\rangle : \Phi_x(y) = z\} \equiv_T \emptyset'$
- $\mathbb{N} \equiv_T \emptyset$
- $\{x : \text{dom } \Phi_x \neq \emptyset\} \equiv_T \emptyset'$
- $\{x : \Phi_x(x) \text{ tarda más de 10 pasos en terminar}\} \equiv_T \emptyset$
- $\{x : 0 \in \text{dom } \Phi_x\} \equiv_T \emptyset'$

Decimos $A \equiv_T B$ cuando $A \leq_T B$ y $B \leq_T A$.

Problema de Post (1944): ¿Existe un A r.e. tal que $\emptyset <_T A <_T \emptyset'$?

Solución al problema de Post [Muchnik (1956), Friedberg (1957)]

Construir un conjunto A r.e. tal que

1. A es low: $A' \equiv_T \emptyset'$

   esto garantiza

   $$A <_T A' \equiv_T \emptyset'$$

2. A es simple: $\overline{A}$ es infinito y $\overline{A}$ no contiene ningún conjunto infinito r.e.

   no puede ser $A \equiv_T \emptyset$. Si lo fuera, $\overline{A}$ sería r.e. e infinito.