Lógica y Computabilidad

Verano 2007

Teorema de incompletitud de Gödel

Artimética de Peano

Lenguaje $\mathcal{L} = \{0, S, +, \cdot\}$ con igualdad.

- axiomas (para $x, y \in \mathrm{VAR}, \varphi \in \mathrm{FORM}(\mathcal{L})$ con variable libre x)
  - S1. $0 \neq S(x)$
  - S2. $S(x) = S(y) \rightarrow x = y$
  - S3. $x + 0 = x$
  - S4. $x + S(y) = S(x + y)$
  - S5. $x \cdot 0 = 0$
  - S6. $x \cdot S(y) = (x \cdot y) + x$
  - S7. $\big(\varphi[x/0] \wedge (\forall x)(\varphi \rightarrow \varphi[x/S(x)])\big) \rightarrow (\forall x)\varphi$
- definimos la teoría S:

$$S = \Big\{\psi : \psi \text{ se forma siguiendo alguno de estos 7 esquemas}\Big\}$$

Sea $\mathcal{N} = \langle \mathbb{N}; 0, S, +, \cdot \rangle$ el modelo estándar de los naturales.

- querríamos capturar todas las verdades de $\mathcal{N}$ con los teoremas de S (en el sistema $SQ^{=}$)
- querríamos $\quad \mathcal{N} \models \varphi \quad$ sii $\quad S \vdash \varphi$
- se puede ver que $\quad \mathcal{N} \models \varphi \quad \Leftarrow \quad S \vdash \varphi$

Notación (solo para esta clase)

- notamos $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ a una fórmula que tiene variables libres $x_1, \dots, x_n$
- sea $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ y sean $t_1, \dots, t_n$ términos

$$\varphi(t_1, \dots, t_n) \qquad \text{representa} \qquad \varphi[x_1, \dots, x_n / t_1, \dots, t_n]$$

- notación para los numerales:

$$\begin{array}{rcl} \overline{1} & = & S(0) \\ \overline{2} & = & S(S(0)) \\ & \vdots & \\ \overline{n} & = & \underbrace{S(\dots S}_{n \text{ veces}}(0)\dots) \end{array}$$

Por ejemplo,

- $\varphi(x) = (\exists y) y + \overline{2} = x$
- $\varphi(\overline{3}) = (\exists y) y + \overline{2} = \overline{3}$

Aritmetización de fórmulas

(	)	$\neg$	$\rightarrow$	$\forall$	$=$	0	S	$+$	$\cdot$	x_1	x_2	x_3	$\ldots$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	$\ldots$

Por ejemplo,

	(	$\forall$	x_1	)	$\neg$	S	(	x_1	)	$=$	x_1
	2	3	5	7	11	13	17	19	23	29	31
	1	5	11	2	3	8	1	11	2	6	13
$\prod$	2^1	3^5	5^{11}	7^2	11^3	13^8	17^1	19^{11}	23^2	29^6	31^{13}

- toda fórmula de $\mathcal{L}$ se representa con un número natural (se llama número de Gödel de la fórmula)
- de la misma manera, toda demostración en S se representa con un número natural (se llama número de Gödel de la demostración)

Resultados previos

Teorema

Los siguientes predicados son primitivos recursivos

- *var*(x)*: x es el número de Gödel de una expresión que consiste de una variable*
- *term*(x)*: x es el número de Gödel de una expresión que consiste de un término*
- *form*(x)*: x es el número de Gödel de una fórmula de* FORM($\mathcal{L}$)
- *$axSQ_i(x)$: x es el número de Gödel de una instanciación del i-ésimo axioma de $SQ^=$*
- *$axS_i(x)$: x es el número de Gödel de una instanciación del i-ésimo axioma de S*
- *$MP(x, y, z)$: z es el número de Gödel de una expresión que resulta de MP de las expresiones con número de Gödel x e y*
- *$dem(x) = x$ es el número de Gödel de una demostración de S*

Funciones expresables en S

Una relación $R : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ es expresable en S si existe una fórmula φ con (únicas) variables libres $x_1, \ldots, x_n$ tal que para todo $k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{N}$:

- si $R(k_1, \ldots, k_n)$ es verdadero en $\mathcal{N}$ entonces
$$S \vdash \varphi(\overline{k_1}, \ldots, \overline{k_n})$$
- si $R(k_1, \ldots, k_n)$ es falso en $\mathcal{N}$ entonces
$$S \vdash \neg\varphi(\overline{k_1}, \ldots, \overline{k_n})$$

Teorema

R es representable en S sii R es computable.

Consistencia y ω-consistencia

Sea $\Gamma \subseteq \mathrm{FORM}(\mathcal{L})$

Γ es consistente si no existe $\varphi \in \mathrm{FORM}(\mathcal{L})$ tal que

$$\Gamma \vdash \varphi \qquad \text{y} \qquad \Gamma \vdash \neg\varphi$$

Γ es ω-consistente cuando

$$\text{si } \Gamma \vdash \varphi(\overline{n}) \text{ para todo } n \text{, entonces } \Gamma \nvdash (\exists x)\neg\varphi(x)$$

Proposición

Si Γ es ω-consistente entonces Γ es consistente.

Una teoría es Γ completa si para toda sentencia φ, $\Gamma \vdash \varphi$ o $\Gamma \vdash \neg\varphi$

La fórmula de Gödel

$$\begin{array}{lcl} W(e,y) & : & e \text{ es el número de Gödel de una fórmula } \psi \\ & & \text{con una única variable libre } x_1 \text{ y además} \\ & & y \text{ es el número de Gödel de una demostración en } S \text{ de } \psi(\overline{e}) \end{array}$$

El predicado $W : \mathbb{N}^2 \to \{0,1\}$ es primitivo recursivo, luego es expresable en S por una fórmula $\mathcal{W}(x_1, x_2)$. Consideremos

$$\begin{array}{rcl} \varphi(x_1) & = & (\forall x_2)\neg\mathcal{W}(x_1, x_2) \\ & = & \text{“la fórmula con número de Gödel } x_1 \text{ instanciada en } \overline{x_1} \\ & & \text{no es demostrable en } S\text{”} \end{array}$$

Sea m el número de Gödel de $\varphi(x_1)$. Consideremos

$$\begin{array}{rcl} \varphi(\overline{m}) & = & (\forall x_2)\neg\mathcal{W}(\overline{m}, x_2) \\ & = & \text{“la fórmula con número de Gödel } m \text{ instanciada en } \overline{m} \\ & & \text{no es demostrable en } S\text{”} \\ & = & \text{“}\varphi(\overline{m}) \text{ no es demostrable en } S\text{”} \\ & = & \text{“yo no soy demostrable en } S\text{”} \end{array}$$

Teorema de incompletitud de Gödel (1931)

Recordemos que m es el número de Gödel de

$$\varphi(x_1) = (\forall x_2)\neg\mathcal{W}(x_1, x_2)$$

Teorema

$$\left.\begin{array}{l} \text{1. } \textit{si } S \textit{ es consistente, } S \nvdash \varphi(\overline{m}) \\ \text{2. } \textit{si } S \textit{ es } \omega\textit{-consistente, } S \nvdash \neg\varphi(\overline{m}) \end{array}\right\} \textit{si } S \textit{ es } \omega\textit{-consistente, es incompleta}$$

Demostración.

1. Sup. $S \vdash (\forall x_2)\neg\mathcal{W}(\overline{m}, x_2)$
   - sea k el número de Gödel de alguna demostración en S
   - $W(m, k)$ es verdadero
   - $S \vdash \mathcal{W}(\overline{m}, \overline{k})$
   - como $S \vdash (\forall x_2)\neg\mathcal{W}(\overline{m}, x_2)$ por SQ4, $S \vdash \neg\mathcal{W}(\overline{m}, \overline{k})$
   - S es inconsistente

2. Sup. $S \vdash \neg(\forall x_2)\neg\mathcal{W}(\overline{m}, x_2)$
   - como S es consistente, $S \nvdash (\forall x_2)\neg\mathcal{W}(\overline{m}, x_2)$
   - $W(m, k)$ es falso para todo k
   - $S \vdash \neg\mathcal{W}(\overline{m}, \overline{k})$ para todo k
   - como S es ω-consistente, $S \nvdash (\exists x_2)\neg\neg\mathcal{W}(\overline{m}, x_2)$
   - $S \nvdash \neg(\forall x_2)\neg\mathcal{W}(\overline{m}, x_2)$
   - $S \nvdash \neg\varphi(\overline{m})$

$\square$

Decimos que $\varphi(\overline{m})$ es independiente

Fórmulas verdaderas en $\mathcal{N}$ pero no demostrables en S

Recordemos que m es el número de Gödel de

$$\varphi(x_1) = (\forall x_2)\neg\mathcal{W}(x_1, x_2)$$

de modo que

$$\begin{aligned} \varphi(\overline{m}) &= (\forall x_2)\neg\mathcal{W}(\overline{m}, x_2) \\ &= \text{“}\varphi(\overline{m}) \text{ no es demostrable en } S\text{”} \end{aligned}$$

- si $\varphi(\overline{m})$ fuese falsa en $\mathcal{N}$ (i.e. $\mathcal{N} \not\models \varphi(\overline{m})$), $\varphi(\overline{m})$ sería demostrable en S, pero acabamos de ver que esto no es así
- entonces $\varphi(\overline{m})$ es verdadera en $\mathcal{N}$, pero no demostrable en S:

$$\mathcal{N} \models \varphi(\overline{m}) \qquad \text{y} \qquad S \nvdash \varphi(\overline{m})$$

- esto no contradice el teorema de completitud:

$$\underbrace{S \not\models \varphi(\overline{m})}_{\substack{\text{hay un modelo de } S \\ \text{en donde } \varphi(\overline{m}) \text{ es falsa}}} \qquad \text{sii} \qquad S \nvdash \varphi(\overline{m})$$

Teorema de Gödel-Rosser (1936)

Teorema

Si S es consistente, es incompleta.

Una teoría Γ es recursivamente axiomatizable si existe una teoría Γ' tal que "¿$x \in \Gamma'$?" es computable y $\Gamma \vdash \varphi$ sii $\Gamma' \vdash \varphi$

Corolario

Cualquier teoría recursivamente axiomatizable que extiende a S es incompleta.

Aritmética de Robinson (1950)

Lenguaje $\mathcal{L} = \{0, S, +, \cdot\}$.

- axiomas (para $x, y \in \text{VAR}$)

R1. $x_1 = x_1$

R2. $x_1 = x_2 \rightarrow x_2 = x_1$

R3. $x_1 = x_2 \rightarrow (x_2 = x_3 \rightarrow x_1 = x_3)$

R4. $x_1 = x_2 \rightarrow S(x_1) = S(x_2)$

R5. $x_1 = x_2 \rightarrow (x_1 + x_3 = x_2 + x_3 \wedge x_3 + x_1 = x_3 + x_2)$

R6. $x_1 = x_2 \rightarrow (x_1 \cdot x_3 = x_2 \cdot x_3 \wedge x_3 \cdot x_1 = x_3 \cdot x_2)$

R7. $S(x) = S(y) \rightarrow x = y$

R8. $0 \neq S(x)$

R9. $x \neq 0 \rightarrow (\exists y)x = S(y)$

R10. $x + 0 = x$

R11. $x + S(y) = S(x + y)$

R12. $x \cdot 0 = 0$

R13. $x \cdot S(y) = (x \cdot y) + x$

- definimos la teoría R:

$$R = \{\psi : \psi \text{ se forma siguiendo alguno de estos 13 esquemas}\}$$

- R es una sub-teoría de S
- R no tiene axioma de inducción
- R es incompleta

Aritmética de Presburger (1929)

Lenguaje $\mathcal{L} = \{0, S, +\}$ con igualdad. Sin $\cdot$

- axiomas (como S pero sin S5 ni S6):

  S1. $0 \neq S(x)$
  S2. $S(x) = S(y) \to x = y$
  S3. $x + 0 = x$
  S4. $x + S(y) = S(x + y)$
  S7. $\big(\varphi[x/0] \wedge (\forall x)(\varphi \to \varphi[x/S(x)])\big) \to (\forall x)\varphi$

- definimos la teoría P:

$$P = \big\{\psi : \psi \text{ se forma siguiendo alguno de estos 5 esquemas}\big\}$$

- P es completa
- P es decidible