1. Predicados recursivos primitivos

Un número natural es primo sii tiene exactamente dos divisores distintos, 1 y él mismo. Lo mismo, un número natural es primo sii es mayor que 1 y solamente es divisible por sí mismo. 1 no tiene dos divisores distintos, por lo tanto no es primo.

Veamos que el predicado "x es primo", Prime(x), es RP.

Tenemos varias maneras de decirlo. Sea $p \in \mathbb{N}_0$:

- No lo divide ningún número n, $1 < n < p$.
- Entre $1 \leqslant n \leqslant p$ tiene exactamente dos divisores.

Para ambos casos necesitamos tener el predicado "x divide a y", $x|y$.

Lo vieron en la teórica.

Recordemos Álgebra 1:

$$x|y \iff \exists z, x.z = y$$

Tenemos el predicado, hay que acotarlo.

z no puede ser más grande que y.

$$x|y \iff \exists_{z \leqslant y}(x.z = y)$$

Es RP.

Volvamos a los primos.

Primera versión.

$$Prime(x) \iff x > 1 \wedge \forall_{t \leqslant x}(t = 1 \vee t = x \vee \not(t|x))$$

Segunda versión.

$$Prime(x) \iff (\sum_{t \leqslant x} t|x) = 2$$

Ahora que tenemos esto, ¿cómo hacemos $\pi(x)$, la función que cuenta primos?

$$\pi(x) = \sum_{t \leqslant x} Prime(t)$$

1.1. Cuantificación acotada por abajo

Tenemos que definir como tomamos al rango vacío, y lo vamos a tomar como verdadero.

$$g(y, z, x_1, \ldots, x_n) = \forall_{y \leqslant t \leqslant z} P(t, x_1, \ldots, x_n)$$

$$g(y, z, x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} \forall_{t \leqslant (z - \cdot y)} P(t + y, x_1, \ldots, x_n) & \text{si } y \leqslant z \\ 1 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

2. Minimización acotada

2.1. Suma de cuadrados

u(n) = el n-ésimo numero que es suma de cuadrados.

Obviamente hay infinitos. Si hubiera finitos, agarro el último, y ese al cuadrado más 1 al cuadrado es una suma de cuadrados mas grande.

$$u(0) = 0$$

$$u(n+1) = min_{t \leqslant u(n)^2+1}(t > u(n) \wedge \exists_{y \leqslant t} \exists_{z \leqslant t}(t = y^2 + z^2))$$

Esto no es una minimización clásica.

$$v(j, k) = min_{t \leqslant k}(t > j \wedge \exists_{y \leqslant t} \exists_{z \leqslant t}(t = y^2 + z^2))$$

$$w(n) = v(n, n^2 + 1)$$

Entonces,

$$u(n+1) = w(u(n))$$

La minimización es una búsqueda, es un existe garantizado de terminar. Es la manera de dar un número con ciertas características.

3. Maximización acotada

$$g(x, y) = max_{t \leqslant y} R(x, t)$$

$$g(x, y) = min_{t \leqslant y}(R(t, u) \wedge \forall_{u \leqslant y}(u > t \Rightarrow \neg R(x, u)))$$

4. Minimización no acotada

n-ésimo larger twin prime.

$$T(0) = 0$$

$$T(n+1) = min_t(t > T(n) \wedge Prime(t) \wedge Prime(t-2))$$

No puede ser RP (por ahora). No está demostrado que haya infinitos. Más aún, si pudiéramos acotar la minimización, estaríamos demostrando que hay infinitos.